

ALFA-KARARLI GÜRÜLTÜDE ALTUZAY TEKNİKLERİYLE KESTİRİLEN SİNÜZOİDAL SIKLIKLARIN İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ

Mustafa A. Altinkaya

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Gülbahçe Köyü, 35437, Urla, İzmir
E. Posta : altink@likya.iyte.edu.tr, Tel: 232 498 6529, Faks: 232 498 6505

Bildiri Konusu: Sinyal Analizi

Özetçe

Bu çalışmada simetrik alfa-kararlı ($S\alpha K$) gürültüde gözlemlenen bir sinüzoidin KAKİ'ye dayalı genelleştirilmiş ortak değişim katsayıları (GODEK) matrisinin özanalizi ve çoklu sinyal ayrıştırması (MUSIC) yöntemiyle bulunan sıklık kestiriminin istatistiksel özellikleri, kestirimin histogramı incelenerek araştırılmıştır. Bu histogramın, karakteristik üsteli ve ortalaması toplanır gürültününinkilerle örtüşen ve saçılımı genelleştirilmiş sinyal gürültü oranı (GSGO) ve veri uzunluğunun üstel birer işleviyle azalan bir $S\alpha K$ dağılımla modellenenildiği gösterilmiştir.

1 Giriş

Sinüzoidal sıklık kestirimindeki çoğu çalışma toplanır gürültünün Gauss dağılımına sahip olduğunu varsaymaktadır. Fakat gürültü Gauss-olmayan, özellikle etekleri dolu bir dağılım sınıfındaysa veya dürtün bir doğası varsa, Gauss gürültüsü varsayımına dayanan parametre kestiricileri başarısız olurlar.

Dürtün gürültü süreçleri kararlı dağılımlarla modellenenbilirler. Eğer sinyal çok sayıda bağımsız ve eşdeğer dağılımların toplamı olarak düşünülebilirse, bu dağılım Genelleştirilmiş Merkezi Limit Teoremi'ne göre kararlı bir dağılım olacaktır [1]. Ayrıca kararlı dağılımlar limitlerinde Gauss dağılımını da kapsamaktadırlar.

Eğer toplanır gürültü etekleri dolu bir dağılıma sahipse verinin ortak-değişim (covariation [2]) katsayılarını (ODEK) kullanan sıklık kestiricileri Gauss gürültüsü varsayımına dayanan verinin ikinci kereden istatistiklerini (İKİ) kullanan kestiricilerden daha başarılı olmaktadır.

ODEK'ler ilk kez [3]'te Çoklu Sinyal Ayrıştırması (MUSIC) yönteminde kullanılarak geliş yönü kestirimi problemine uygulanmıştır. Daha sonra Kesirli Alçak Kerteli İstatistiğe (KAKİ) dayalı MUSIC (KAKİ-MUSIC) olarak adlandırabileceğimiz bu yöntem [4]'te alfa-kararlı gürültü ortamında gözlemlenen bir sinüzoidin sıklık parametresinin kestirilmesinde kullanılmıştır. [6]'da ise alfa-kararlı gürültüde gözlemlenen çoklu ton sinyallerinin sıklıklarının KAKİ tabanlı altuzay teknikleriyle kestirimi yapılmıştır. Bu çalışmaların hepsinin ortak noktası sinüzoidlerin $S\alpha K$ bir süreç olarak modellenmesidir. Daha sonra [5]'te genelleştirilmiş ODEK'lerin (GODEK) kullanımı önerilmiş ve GODEK'lerin hem sinyal bileşeninin rasgele evreli sinüzoidler, hem de özbağlanımlı (autoregressive) bir $S\alpha K$ süreç olarak kabul edileceği altuzay teknikleriyle kullanılabilirliği gösterilmiştir. Ayrıca $S\alpha K$ gürültü ortamındaki sinüzoidlerin birim kerteli GODEK matrisleri, Gauss gürültüdeki sinüzoidlerin ortak-değişim matrislerine benzer yapıdadır.

Bu çalışmada birim kerteli GODEK matrisi oluşturularak, S α K gürültüde gözlemlenen tek bir sinüzoidin KAKİ-MUSIC ile kestirilen sıklık parametresinin istatistiksel özellikleri araştırılacaktır. 2. bölümde S α K dağılımlar kısaca anlatılmıştır. 3. bölümde GODEK'lerin sıklık kestirimi problemine uygulanması anlatılmıştır. 4. bölümünde ise benzetim çalışmalarıyla sıklık kestirimi histogramının S α K bir dağılımla nasıl modellenebileceği anlatılmaktadır. Son olarak 5 bölümde varyans bildirilmektedir.

2 S α K Dağılımlar

Simetrik α -kararlı (S α K) dağılımlar kararlı dağılımların önemli bir alt sınıfını oluştururlar. S α K bir dağılımın karakteristik üsteli α , ($0 < \alpha \leq 2$); konum parametresi δ , ($-\infty < \delta < \infty$) ve saçılımı γ , ($\gamma > 0$) ile gösterildiğinde S α K bir değişkenin karakteristik işlevi

$$\phi(\omega) = \exp \{j\delta\omega - \gamma|\omega|^\alpha\} \quad (1)$$

şeklinde verilir. S α K dağılımların yalnızca $p < \alpha$ kertesinden momentleri tanımlıdır. Bu yüzden verinin İKİ'lerine dayalı kestirim yöntemleri uygulanamaz. Bir çözüm KAKİ'lerin kullanılmasıdır [1]. İki tane ortak S α K, gerçel ve saçılımları γ_x ve γ_y olan rastlantısal değişkenin ODEK'i

$$\lambda_{X,Y} = \frac{[X, Y]_\alpha}{[Y, Y]_\alpha} = \frac{E[XY^{<p-1>}]}{E[|Y|^p]}, \quad 1 \leq p < \alpha. \quad (2)$$

şeklinde verilir. Burada $Y^{<p-1>} = |Y|^{p-1} \text{signum}(Y)$ ve

$$\text{signum}(Y) = \begin{cases} 1 & \text{for } Y > 0, \\ 0 & \text{for } Y = 0, \\ -1 & \text{for } Y < 0. \end{cases} \quad (3)$$

olarak tanımlanmıştır ve ortak-değişim katsayısının bu tanımı $1 \leq p < \alpha$ olduğunda p 'den bağımsızdır [7].

3 Sıklık Kestirimi ve Genelleştirilmiş Ortak-Değişim Katsayıları

Sinyal gerçel sinüzoidallerin toplamından oluşmakta,

$$s_n = \sum_{k=1}^K A_k \sin(\omega_k n + \theta_k) \quad (4)$$

ve toplanır S α K gürültü ortamında gözlemlenmektedir:

$$x_n = s_n + z_n \quad n = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Burada bilinmeyen parametrelerin k 'inci ton sinyali için genlik A_k , ton sıklığı ω_k ve evre açısı θ_k olduğu varsayılmıştır. N veri örneklerinin sayısını, K ton sinyallerinin sayısını göstermektedir. x_n ve z_n ise gözlemlenen dizi X_n ve S α K gürültü dizisi Z_n 'nin gerçeklenimleridir.

Sinüzoidal sıklıkların kestirilmesi için (2)'deki KAKİ'ye dayalı ODEK'lerden esinlenerek [5]'de önerilen ve uygulandığı rasgele süreçlerin dağılımları üzerinde bir sınırlama getirmeyen genelleştirilmiş ODEK'ler (GODEK) kullanılabilir. İki rasgele değişken X ve Y 'nin GODEK'i

$$\lambda_{X,Y}(p) = \frac{E[XY^{<p-1>}]}{E[|Y|^p]}, \quad 0 < p < \alpha, \quad (6)$$

şeklinde hesaplanır. (4) ve (5)'in (6)'ya yerleştirilmesi ile X_n ile X_l 'nin GODEK'i

$$\lambda_p(X_n, X_l) = \lambda_{X_n, X_l}(p) = E \left\{ \left(\sum_{i=1}^K A_i \sin\{\omega_i n + \Theta_i\} + Z_n \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^K A_j \sin\{\omega_j l + \Theta_j\} + Z_l \right)^{\langle p-1 \rangle} \cdot \left(E \left| \sum_{j=1}^K A_j \sin\{\omega_j l + \Theta_j\} + Z_l \right|^p \right)^{-1} \right\} \quad (7)$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terimin doğrusal olmaması nedeniyle genel p değerleri için kapalı formda bir çözüm elde etmek mümkün değildir. Ancak $p = 1$ olarak seçildiğinde eşitlik sadeleştirilerek

$$\lambda_{X_n, X_l}(p)|_{p=1} = E \left\{ \left(\sum_{i=1}^K A_i \sin\{\omega_i n + \Theta_i\} + Z_n \right) \cdot \text{signum} \left(\sum_{j=1}^K A_j \sin\{\omega_j l + \Theta_j\} + Z_l \right) \right\} \cdot \left(E \left| \sum_{j=1}^K A_j \sin\{\omega_j l + \Theta_j\} + Z_l \right| \right)^{-1} \quad (8)$$

elde edilmektedir. [5]'te $S\alpha K$ gürültüde gözlemlenen rasgele evreli bir sinüzoidin GODEK'lerinin

$$\lambda_{X_n, X_l}(p)|_{p=1} = \zeta_1 \cos\{\omega_1(n-l)\} + P_{z_l}^{(1)} \delta_{nl} \quad (9)$$

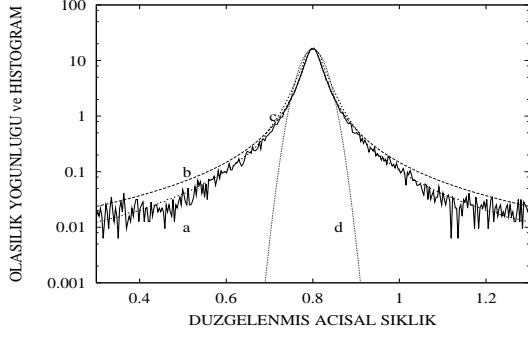
olarak bulunduğu gösterilmektedir. Burada ζ_1 ve $P_{z_l}^{(1)}$ sabit katsayılar olup toplanır beyaz gürültünün $S\alpha K$ dağılımına bağlıdır ve δ_{nl} ise Kronecker delta'dır. Aynı makalede sinüzoidlerin sayısının iki olduğu durumda da benzer bir ifadenin elde edildiği gösterilmekte ve K adet sinüzoid $S\alpha K$ gürültüde gözlemlendiğinde dizinin GODEK'lerinin

$$\lambda_{X_n, X_l}(p)|_{p=1} = \sum_{k=1}^K \varrho_k \cos\{\omega_k(n-l)\} + P_{z_l}^{(K)} \delta_{nl} \quad (10)$$

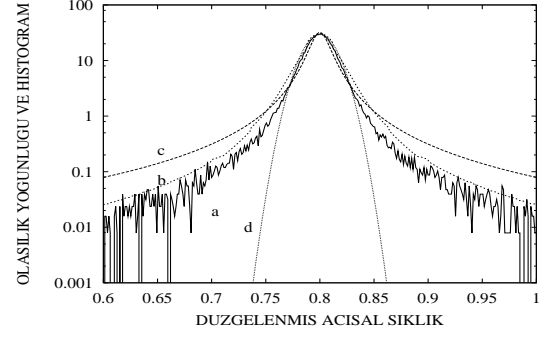
olarak elde edileceği belirtilmektedir. Bu eşitlikte $\{\varrho_k, k = 1, \dots, K\}$ lar pozitif gerçel sabitler olup toplanır $S\alpha K$ gürültünün α 'sının ve sinüzoidlerin genliklerinin doğrusal olmayan bir fonksiyonu olarak değişmektedir. (10) yaygın olarak bilinen toplanır beyaz Gauss gürültüde gözlemlenen sinüzoidlerin İKİ'leri olan ortak-değişinti matrisleriyle benzer yapıdadır. Böylece $p = 1$ değeri için GODEK matrisi $\mathbf{C}_x^{(1)} = \{\lambda_1(n, l), n, l = 1, \dots, M\}$ olarak oluşturulur.

GODEK matrisi $S\alpha K$ süreçler için İKİ'ye dayalı ortak-değişinti matrisinin Gauss süreçler için taşıdığına benzer bir anlam taşımaktadır. GODEK matrisine özayırıştırma uygulandığında, büyük özdeğerler sinyal altuzayı özvektörlerine ait olmakta, diğer özvektörler ise gürültü altuzayını oluşturmaktadırlar. Böylece GODEK matrisine uygulanan bir öze analiz sonrasında uygun bir sinyal ya da gürültü altuzayı tekniği ile sinyal parametreleri kestirilebilir. GODEK matrisinin bakışlı olmadığına dikkat edilmelidir. Bu yüzden öze analiz daha zorlaşmakta ve Gauss süreçler için geliştirilmiş olan birçok altuzay parametre kestirim teknikleri alfa-kararlı süreçler için uygulanamaz olmaktadır.

Gauss gürültü ortamında geliş yönü ve sıklık kestirimi problemlerinde uygulanan MUSIC yöntemiyle sıklık parametresi kestirimlerinin istatistiksel özellikleri daha önce araştırılmıştır [8, 9]. Sıklık kestirimi probleminde kestirimlerin sonuçlardaki özellikleri belirlenirken örneklem ortak-değişinti matrisi



Şekil 1: $\alpha_g = 1.001$ iken KAKİ-MUSIC sıklık kestirimi histogramı ve buna uydurulan $S\alpha K$ olasılık dağılımları. a: histogram, b: en uygun $S\alpha K$ dağılım ($\alpha_m = 1.001$), c: en uygun $S\alpha K$ dağılım ($\alpha_m = 1.3$), d: en uygun $S\alpha K$ dağılım ($\alpha_m = 2$, Gauss) ($M = 20$, $N = 50$, , 100000 gürültü ve faz gerçeleşimi)



Şekil 2: $\alpha_g = 1.5$ iken KAKİ-MUSIC sıklık kestirimi histogramı ve buna uydurulan $S\alpha K$ olasılık dağılımları. a: histogram, b: en uygun $S\alpha K$ dağılım ($\alpha_m = 1.5$), c: en uygun $S\alpha K$ dağılım ($\alpha_m = 1.001$), d: en uygun $S\alpha K$ dağılım ($\alpha_m = 2$, Gauss) ($M = 20$, $N = 50$, , 100000 gürültü ve faz gerçeleşimi)

oluşturmakta kullanılan veri vektörlerinin istatistiksel olarak bağımsız olmaları yüzünden daha zordur [8]. Böylece bu çalışmada $S\alpha K$ gürültü ortamında gözlemlenen bir sinüzoidin sıklık parametresi kestirimlerinin histogramları $S\alpha K$ bir dağılımla modellenmiş, toplanır $S\alpha K$ gürültünün parametrelerindeki değişimlerin kestirimin histogramına uyan $S\alpha K$ modelin parametreleri üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

4 Benzetim Çalışmaları

Bu çalışmada KAKİ-MUSIC yöntemi ile $S\alpha K$ gürültü ortamındaki kestirilen gerçel bir sinüzoidin sıklık parametresinin istatistiksel özellikleri araştırılacaktır. KAKİ-MUSIC sıklık kestirimi $0 < p < \alpha$ aralığındaki p değerleri için $\hat{C}_x^{(p)} = \{\hat{\lambda}_p(n, l), n, l = 1, \dots, M\}$, olarak gösterilen ve (n, l) 'inci elemanı

$$\hat{\lambda}_p(n, l) = \hat{\lambda}_{X_n, X_l}(p) = \frac{\sum_{i=1}^{N-M+1} X_{n+i-1} |X_{l+i-1}|^{p-1} \text{signum}(X_{l+i-1})}{\sum_{i=1}^{N-M+1} |X_{l+i-1}|^p}, \quad n, l = 1, \dots, M, \quad (11)$$

şeklinde verilen örneklem GODEK matrisine özvektör ayrıştırması uygulanarak,

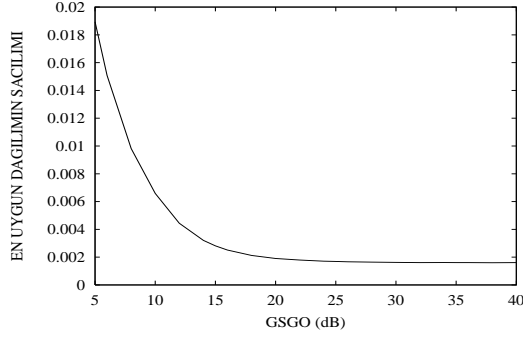
$$\text{KAKİ-}\check{C}\text{SA}(\omega) = \frac{1}{\sum_{i=2K+1}^M |\mathbf{d}^H \hat{\mathbf{v}}_i|^2} \quad (12)$$

ifadesindeki KAKİ-MUSIC spektrumunun tepe değeri olarak bulunur. Burada \mathbf{d} karmaşık sinüzoidal vektör $\mathbf{d} = [1 \exp\{j\omega\} \cdots \exp\{j\omega(M-1)\}]^T$ ve $\{\hat{\mathbf{v}}_i, i = 2K+1, \dots, M\}$ en küçük $M - 2K$ özdeğere ait kestirilen gürültü altuzayı kolon özvektörlerdir. Burada üsteller H ve T , karmaşık eşlenik devrik ve devrik işlemlerini göstermektedir.

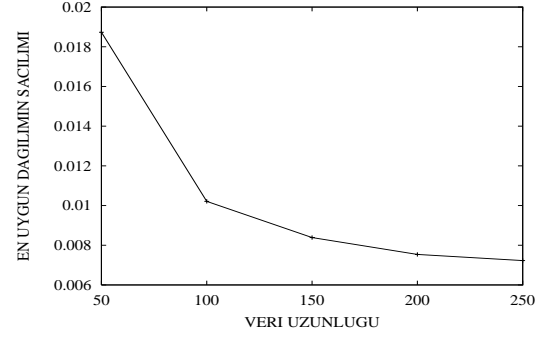
Benzetimlerde aksi belirtilmediği sürece $N = 50$, benzetim yürütümlerinin sayısı 100000, tek sinüzoidin düzgelemiş açısallığı $\omega = \omega_1 = 0.8$ 'dir. Histogramlara uydurulan $S\alpha K$ dağılımların hesaplanmasında [10]'de önerilen yöntem kullanılmıştır.

4.1 Kestirim histogramına en uygun $S\alpha K$ modelin belirlenmesi

Şekil 1'de karakteristik üsteli $\alpha_g = 1.001$ olan toplanır $S\alpha K$ gürültüdeki KAKİ'ye dayalı MUSIC kestirimlerinin histogramı ve bu histograma α_m değerlerini sabitleyerek elde edilen uygun $S\alpha K$ dağılımlar



Şekil 3: KAKİ-MUSIC sıklık kestirimi histogramına en uygun $S\alpha K$ dağılımının saçılımı γ 'nın toplamır $S\alpha K$ gürültünün $GSGO$ 'suna bağlı değişimi ($M = 20$, $N = 50$, 100000 gürültü ve faz gerçekleşimi)



Şekil 4: KAKİ-MUSIC sıklık kestirimi histogramına en uygun $S\alpha K$ dağılımının saçılımı γ 'nın veri uzunluğuna bağlı değişimi ($M = 20$, $GSGO = 5$ dB, 100000 gürültü ve faz gerçekleşimi)

görülmektedir. Birbirleriyle karıştırılmalarını önlemek için toplamır gürültünün ve histograma uydurulan $S\alpha K$ dağılım modelinin karakteristik üstelleri α_g ve α_m ile gösterilecektir. Şekilde histograma uydurulan $S\alpha K$ dağılımların α_m parametreleri 1.001, 1.5 ve 2'dir. Her bir $S\alpha K$ olasılık yoğunluğu işlevinin kestirim histogramına en iyi uyan saçılımlısı olarak her noktadaki farkların mutlak değerlerinin toplamını en küçük yapan saçılım parametresi seçilmiştir. Şekilde $\alpha_m = \alpha_g = 1.001$ olduğunda en uygun dağılımın sağlandığı görülmektedir. $\alpha_m = \alpha_g = 1.001$ olduğunda kestirim histogramının en güvenilir olan yüksek genlikli değerlerinde en büyük uyum sağlanmıştır. Şekil'de "c" eğrisiyle gösterilen $S\alpha K|_{\alpha_m=1.3}$ (karakteristik üsteli $\alpha_g = 1.3$ olan $S\alpha K$ olasılık yoğunluğu işlevi) düşük genlikli histogram değerlerine daha iyi uymakla birlikte, bu olasılık yoğunluğunun aldığı yüksek değerlerde uyum başarımı $S\alpha K|_{\alpha_m=1.001}$ 'den daha düşük olmuştur. Özellikle $\alpha_m = 2$ ile elde edilen ve histograma en iyi uyan Gauss dağılımının bile kestirimin dağılımından ne kadar farklı olduğuna dikkat edilmelidir.

Kestirim histogramına en iyi uyan $S\alpha K$ dağılımın $\alpha_m = \alpha_g$ durumunda sağlanmasının $\alpha_g = 1.001$ olan bir özel durum olmadığını göstermek üzere Şekil 2'de $\alpha_g = 1.5$ ile elde edilen kestirim histogramı ve değişik α_m parametreleriyle elde edilen ve bu histograma en iyi uyan $S\alpha K$ olasılık yoğunluk işlevleri çizdirilmiştir. Bu benzetimde de $\alpha_m = \alpha_g = 1.5$ için diğerlerinden daha iyi bir başarımlı sağlandığı görülmektedir. Başka α_g değerleri için de benzer sonuçlar alınmıştır.

4.2 Histograma uyan $S\alpha K$ dağılım saçılımının $GSGO$ ve veri uzunluğuna bağlı değişimi

Önceki deneylerde sıklık kestirimi histogramına en iyi uyan $S\alpha K$ dağılımın $\alpha_m = \alpha_g$ olduğunda sağlandığını gördükten sonra bu kestirimin saçılımının genelleştirilmiş sinyal gürültü oranı $GSGO$ 'ya bağlı olarak nasıl değiştiği incelenmiştir. Şekil 3'te görüldüğü gibi KAKİ-MUSIC sıklık kestirimi histogramına en iyi uyan $S\alpha K$ dağılımının saçılımı $GSGO$ artarken üstel bir işlevle azalmaktadır.

Şekil 4'te veri uzunluğunun kestirim histogramına en iyi uyan $S\alpha K$ dağılımının saçılım parametresi üzerindeki etkisi görülmektedir. Toplamır Gauss gürültüdeki MUSIC sıklık kestiriminde olduğu gibi, toplamır $S\alpha K$ gürültüdeki KAKİ-MUSIC kestiriminin saçılım veya ölçek parametresi veri uzunluğu artışının üstel bir işleviyle küçülmektedir.

5 Vargılar

Bu çalışmada daha önce [5]'de gösterilen $S\alpha K$ toplanır gürültüde gözlemlenen sinüzoidlerin birinci kereden GODEK'lerinin oluşturduğu matrisin öz-analizinde, İKİ'ye dayalı ortak-değişinti matrisleriyle, katsayıları farklı olmakla birlikte, aynı ifadelerin elde edilmesinden yola çıkılarak benzer şekilde istatistiksel özelliklerinin bulunması amaçlanmıştır. Ancak toplanır gürültünün genel bir $S\alpha K$ dağılımdan olması nedeniyle, GODEK'lerin kullanıldığı KAKİ-MUSIC kestiriminin histogramının modellenmesine çalışılmıştır. Benzetim çalışmaları sonucunda sıklık kestirimi histogramlarının, karakteristik üsteli ve ortalaması ($\alpha > 1$) sıklık parametresiyle örtüşen, saçılımı ise GSGO ve veri uzunluğunun üstel işlevleri ile azalan bir $S\alpha K$ dağılımla başarıyla modellenebileceği gösterilmiştir.

Kaynakça

- [1] M. Shao ve C. L. Nikias, "Signal processing with fractional lower order moments: Stable processes and their applications," *Proc. IEEE* **81** (1993) 986-1010.
- [2] G. Miller, "Properties of certain symmetric stable distribution," *J. of Multivariate Anal.* **8** (1978) 346-360.
- [3] P. Tsakalides ve C. L. Nikias, "The robust covariation-based MUSIC (ROC-MUSIC) algorithm for bearing estimation in impulsive noise environments", *IEEE Trans. on Signal Processing*, **44** (7) (1996) 1623-1633.
- [4] M. A. Altinkaya, H. Deliç, B. Sankur ve E. Anarım, "Frequency Estimation of Sinusoidal Signals in Alpha-Stable Noise Using Subspace Techniques", *Proc. 8th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, Korfu, Yunanistan, (24-26 Haziran 1996) 234-237.
- [5] M. A. Altinkaya, H. Deliç, B. Sankur, E. Anarım, "Subspace-Based Frequency Estimation of Sinusoidal Signals in Alpha-Stable Noise", *Signal Processing, Special Issue on Signal Processing with Heavy Tailed Distributions* (2002).
- [6] M. A. Altinkaya, B. Sankur, H. Deliç ve E. Anarım, "Alfa-kararlı gürültüde çok tonlu sinyallerin altuzay teknikleriyle parametre kestirimi", *SİU 2001 9. Sinyal İşleme ve Uygulamaları Kurultayı Bildiriler Kitabı*, Magosa, KKTC (25-27 Nisan 2001) 9-14.
- [7] S. Cambanis ve G. Miller, Linear problems in pth order and stable processes, *SIAM Journal of Applied Mathematics* **41** (1) (August 1981) 43-69.
- [8] P. Stoica ve T. Söderström, "Statistical Analysis of MUSIC and Subspace Rotation Estimates of Sinusoidal Frequencies", *IEEE Transaction on Signal Processing* **39** (8) (August 1991) 1836-1847.
- [9] P. Stoica ve A. Nehorai, "MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramer-Rao Bound" *IEEE Transaction on Acoustics Speech and Signal Processing* **37** (5) (May 1989) 720-741.
- [10] R. Zielinski, "High-Accuracy Evaluation of the Cumulative Distribution Function of α -stable Symmetric Distributions" *Journal of Mathematical Sciences* **105** (6) (2001) 2630-2632.