

freedom disintegrator based on the Bennett's linkage. *Vibroengineering PROCEDIA*, Vol. 8, 2016, p. 477-482.

- [5]. Евграфов А.Н. Расчет геометрических и кинематических параметров пространственного рычажного механизма с избыточной связью /А.Н.Евграфов, Г.Н. Петров // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. No3. с.3-8.
- [6]. J. McCarthy, *Geometric Design of Linkages*, Springer, New York, 2000.
- [7]. Rasim İ.Alizade et. al., 2014, *Function Systems of*

Bennet 6R Mechanisms Using Chebyshev Approximation. Elsevier, *Mechanism and Machine Theory*, Volume 81, pp.62-78

- [8]. Яруллин М.Г., Хабибуллин Ф.Ф. Теоретические и практические условия проворачиваемости механизма Беннетта, *Материалы 5-й Международной научно-практической конференции «Машиностроение. Наука и образование ММЕСЕ-2016»*. 30.06-01.07.2016, С 306-316.

Кинематика двухподвижного плоского пятизвенного механизма манипулятора

¹Яруллин Мунир Гумерович*, ²Исянов Илнур Рафаилевич*

^{1, 2} Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ (КНИТУ-КАИ), г.Казань, ул.Карла Маркса, д.10,
¹yarullinmg@yahoo.com*, ²isyanov1993@mail.ru

Abstract

The mathematical model of the kinematics of a planar five-link mechanism with two degrees of freedom. Shown the equations describing the velocity and acceleration of the characteristic points of the mechanism. Determined velocity and acceleration characteristic points E and K by using the system of symbolic calculations and CAD/CAE analysis. The results obtained kinematics in the form of graphs.

Ключевые слова: пятизвенные рычажные механизмы, двухподвижность, кинематика, манипуляторы.

Введение

Одним из путей совершенствования современных машин является применение в них механизмов, имеющих улучшенные кинематические параметры (характеристики). Широкое использование в технике получили плоские одноподвижные рычажные механизмы. Использование же плоских двухподвижных рычажных механизмов в качестве базового механизма различных мехатронных устройств и манипуляторов является весьма перспективным.

Структура и подвижность

Рассмотрим структурную схему двухподвижного плоского рычажного пятизвенного механизма (рис.1). Он образован на основе известного шарнирного четырехзвенника путем образования в шарнире А

соосных двух вращательных пар вместо одной и превращения в стойку вал этих кинематических пар [1]. Таким образом, в новом механизме по сравнению одноподвижным четырехзвенником имеем: первое звено остается ведущим кривошипом, шатун 2 остается шатуном, звено 3 – балансира становится шатуном, звено 4 со стойки превращается во второй ведущий кривошип, а вал соосных вращательных кинематических пар в шарнире А образуется в стойку.

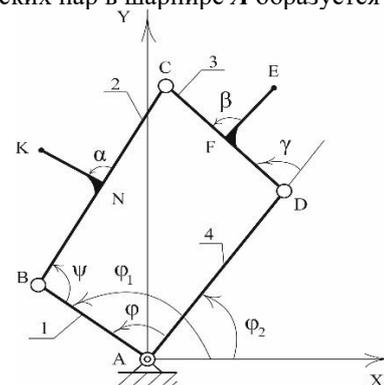


Рис. 1. Плоский двухподвижный пятизвенный рычажный механизм

Степень свободы, полученного механизма определяется по формуле Чебышева и будет равна

$$W = 3(m - 1) - 2p_1 - p_2, \quad (1)$$

где m – число звеньев; p_1 – число высших (одноподвижных) кинематических пар; p_2 – число низших пар.

Тогда имеем:

$$W = 3(5 - 1) - 2 \times 5 = 2.$$

Поскольку механизм имеет два ведущих звена, его кинематика весьма сложна и интересна, поэтому использование его свойств в манипуляторах и в различных устройствах [2-5] является перспективным. Для практического использования этого механизма наиболее интересными являются наиболее отдаленные характерные точки – E и K , на которых могут быть установлены рабочие органы. Поскольку двухподвижный пятизвенный рычажный механизм образован замкнутой кинематической цепью и имеет два входных звена: входными звеньями его являются ведущий кривошип 1 и ведущий стержень 4. Функции положения звеньев и характерных точек механизма определяются от входных координат φ_1 и φ_2 (рис.2), которые представлены как функции от времени $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ [6].

Кинематика манипулятора

Для нахождения скоростей и ускорений необходимо решить задачу определения положений характерных точек механизма. Поскольку эти кинематические параметры являются справочным материалом для дальнейших исследований, прежде всего динамики, как механизма, так и технологических процессов устройства на базе этого двухподвижного пятизвенного рычажного механизма. Задача решается, если звенья стержневых механизмов заменить соответствующими векторами и на их основе построить векторный контур. Векторная интерпретация звеньев механизма изображена на рис. 2.

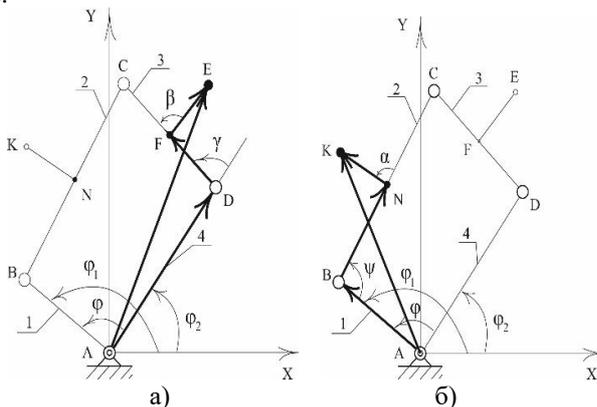


Рис. 2. Векторные контуры: а) А-Д-Ф-Е-А
б) А-В-Н-К-А

Рассмотрим замкнутый векторный контур А-Д-Ф-Е-А (рис.2а) и спроецируем его на координатные оси ОХ и ОУ. Положение характерной точки E будет определяться координатами X_E и Y_E . Тогда векторный контур рассматривается как сумма векторов:

$$\vec{AD} + \vec{DF} + \vec{FE} = \vec{AE}. \quad (2)$$

Составим тригонометрические уравнения для

кинематического анализа характерной точки E . Спроецируем выражение (2) на оси неподвижной системы координат ОХУ, учитывая, что $AE_X = X_E$ и $AE_Y = Y_E$:

$$\begin{cases} X_E = AD \cos \varphi_2 + DF \cos(\gamma + \varphi_2) + \\ \quad + FE \cos(\beta + \gamma + \varphi_2); \\ Y_E = AD \sin \varphi_2 + DF \sin(\gamma + \varphi_2) + \\ \quad + FE \sin(\beta + \gamma + \varphi_2). \end{cases} \quad (3)$$

Для этой системы уравнений (3) примем, что $\varphi_2 = \omega_2 \cdot t$, причем $\omega_2 = const$; а $\beta = 90^\circ$ – принято конструктивно для удобства, поскольку отросток FE жестко связан со звеном CD. Угол γ имеет зависимость от входных координат φ_1 и φ_2 , где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ и вычисляется выражением [4]:

$$\gamma = 2 \tan^{-1} \left(\frac{AB \sin \varphi - \frac{1}{2} BC \sqrt{4 - \frac{(-AB^2 - AD^2 + BC^2 + 2AD \cdot AB \cos \varphi + CD^2)^2}{BC^2 \cdot CD^2}}}{AB \cos \varphi + CD - AD - \frac{1}{2} \frac{-AB^2 - AD^2 + BC^2 + 2AD \cdot AB \cos \varphi + CD^2}{CD}} \right) \quad (4)$$

Здесь также принято, что $\varphi_1 = \omega_1 \cdot t$ и $\omega_1 = const$. Значения ω_1 и ω_2 – в расчетах обоснованно берется в зависимости от необходимого технологического режима работы механизма устройства.

Продифференцировав систему уравнений (3) по времени и учитывая, что $\cos \beta = 0$, $\sin \beta = 1$ получим проекции скорости характерной точки E на координатные оси ОХУ:

$$\begin{cases} V_E^X = AD (-\sin \varphi_2) \varphi_2' + DF (-\sin \gamma \cos \varphi_2 \gamma' + \\ \quad + \cos \gamma (-\sin \varphi_2) \varphi_2') - DF (\cos \gamma \sin \varphi_2 \gamma' - \\ \quad - \sin \gamma \cos \varphi_2 \varphi_2') + FE (-\sin \gamma \sin \varphi_2 \gamma' + \\ \quad + \cos \gamma \cos \varphi_2 \varphi_2') + FE (\cos \gamma \cos \varphi_2 \gamma' - \\ \quad - \sin \gamma \sin \varphi_2 \varphi_2'); \\ V_E^Y = AD \cos \varphi_2 \varphi_2' + DF (-\sin \gamma \sin \varphi_2 \gamma' + \\ \quad + \cos \gamma \cos \varphi_2 \varphi_2') + DF (\cos \gamma \cos \varphi_2 \gamma' - \\ \quad - \sin \gamma \sin \varphi_2 \varphi_2') - FE (-\sin \gamma \cos \varphi_2 \gamma' - \\ \quad - \cos \gamma \sin \varphi_2 \varphi_2') + FE (\cos \gamma \sin \varphi_2 \gamma' + \\ \quad + \sin \gamma \cos \varphi_2 \varphi_2'). \end{cases} \quad (5)$$

Аналогичным образом получим уравнение проекции ускорения точки E :

$$\left. \begin{aligned}
 a_E^X &= (V_E^X)' = AD(-\cos\varphi_2)(\varphi_2')^2 + DF(-\cos\gamma \cos\varphi_2(\gamma')^2 + 2\sin\gamma \sin\varphi_2\gamma'\varphi_2' - \sin\gamma \cos\varphi_2\gamma'' - \cos\gamma \cos\varphi_2(\varphi_2')^2 + DF(\sin\gamma \sin\varphi_2(\gamma')^2 - 2\cos\gamma \cos\varphi_2\gamma'\varphi_2' - \cos\gamma \sin\varphi_2\gamma'' - \sin\gamma \sin\varphi_2(\varphi_2')^2) + FE((-\cos\gamma \sin\varphi_2(\gamma')^2 - 2\sin\gamma \cos\varphi_2\varphi_2'\gamma' - \sin\gamma \sin\varphi_2\gamma'' - \cos\gamma \sin\varphi_2(\varphi_2')^2) + FE(-\sin\gamma \cos\varphi_2(\gamma')^2 - 2\cos\gamma \sin\varphi_2\varphi_2'\gamma' + \cos\gamma \cos\varphi_2\gamma'' - \sin\gamma \cos\varphi_2(\varphi_2')^2); \\
 a_E^Y &= (V_E^Y)' - AD \sin\varphi_2(\varphi_2')^2 + DF(-\cos\gamma \sin\varphi_2(\gamma')^2 - 2\sin\gamma \cos\varphi_2\varphi_2'\gamma' - \sin\gamma \sin\varphi_2\gamma'' - \cos\gamma \sin\varphi_2(\varphi_2')^2) - DF(+\sin\gamma \cos\varphi_2(\gamma')^2 + 2\cos\gamma \sin\varphi_2\varphi_2'\gamma' - \cos\gamma \cos\varphi_2\gamma'' + \sin\gamma \cos\varphi_2(\varphi_2')^2) - FE(-\cos\gamma \cos\varphi_2(\gamma')^2 + 2\sin\gamma \sin\varphi_2\gamma'\varphi_2' - \sin\gamma \cos\varphi_2\gamma'' - \cos\gamma \cos\varphi_2(\varphi_2')^2) + FE(\sin\gamma \sin\varphi_2(\gamma')^2 - 2\cos\gamma \cos\varphi_2\gamma'\varphi_2' - \cos\gamma \sin\varphi_2\gamma'' - \sin\gamma \sin\varphi_2(\varphi_2')^2).
 \end{aligned} \right\} (6)$$

Поскольку дифференцирование выше указанных тригонометрических уравнений (4-7) является достаточно трудоемким, для решения этих уравнений была использована система символьных вычислений Maple 17 и CAD/CAE анализа в системе SolidWorks [11]. Результаты решений уравнений представлены на графиках, а именно в виде сравнения графиков полученных в двух разных системах вычислений (рис 3).

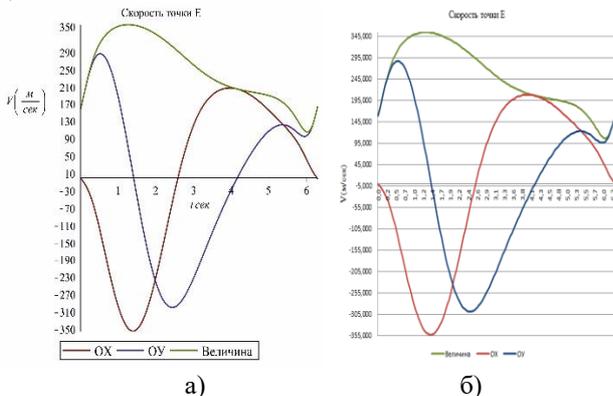


Рис.3. Графики скорости характерной точки E: а) – получены в системе символьных вычислений Maple 17, б) – получены в системе SolidWorks

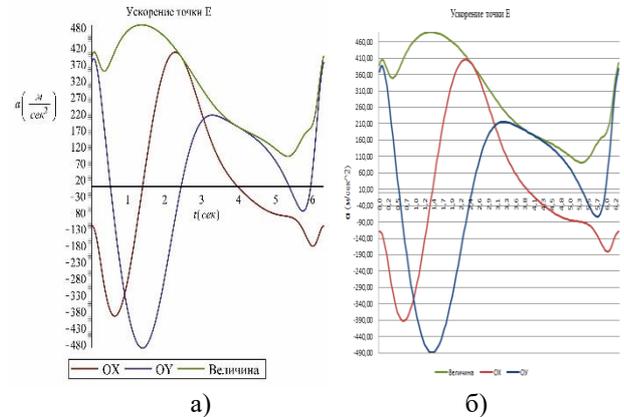


Рис.4. Графики ускорения характерной точки E: а) – получены в системе символьных вычислений Maple 17, б) – получены в системе SolidWorks

Представленные графики на рисунках (3 и 4) отображают результаты расчетов свойств кинематических параметров на промежутке $0 \leq t \leq 6.3$ (сек). Здесь принято $\omega_1 = 2 \text{ c}^{-1}$, $\omega_2 = 1 \text{ c}^{-1}$ (для простоты и удобства расчетов) и $t=6.3$ сек., как время, за которое характерная точка E механизма совершает полный цикл движения в неподвижной системе координат.

Для определения закона движения другой характерной точки K рассмотрим векторный контур A-B-N-K-A, имеющий уравнение:

$$\vec{AB} + \vec{BN} + \vec{NK} = \vec{AK}. \quad (7)$$

Это уравнение в проекциях на оси системы координат OX и OY имеет вид:

$$\begin{cases}
 X_K = AB \cos\varphi_1 + BN \cos(\psi + \varphi_1) + NK \cos(\alpha + \psi + \varphi_1); \\
 Y_K = AB \sin\varphi_1 + BN \sin(\psi + \varphi_1) + NK \sin(\alpha + \psi + \varphi_1).
 \end{cases} \quad (8)$$

В уравнении (8) принят угол $\varphi_1 = \omega_1 \cdot t$, который является входной координатой ведущего звена AB, где $\omega_1 = const$. Угол $\alpha = 90^\circ$ принят конструктивно, а угол ψ имеет зависимость от входных координат φ_1 и φ_2 ведущих звеньев AB и AD соответственно, также от противолежащих углов $\angle ADC$ и $\angle DCB$ и выражается уравнением:

$$\begin{aligned}
 \psi &= 2\pi - \varphi - \cos^{-1}\left(\frac{BC^2 - AD^2 - AB^2 + k + CD^2}{2 \cdot BC \cdot CD}\right) - \\
 \tan^{-1}\left(\frac{AB \sin\varphi}{AD - AB \cos\varphi}\right) &- \cos^{-1}\left(\frac{CD^2 - BC^2 + AD^2 + AB^2 - k}{2CD\sqrt{AD^2 + AB^2 - k}}\right).
 \end{aligned} \quad (9)$$

где применены следующие сокращения:



$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2; k = 2 \cdot AD \cdot AB \cos \varphi.$$

Дифференцируя уравнение (8) по времени получим проекции скорости характерной точки **K** на координатные оси OX и OY:

$$\left\{ \begin{aligned} V_K^X &= AB(-\sin \varphi_1)\varphi_1' - BN(-\sin \psi \cos \varphi_1 \psi' + \\ &+ \cos \psi(-\sin \varphi_1)\varphi_1') + BN(\cos \psi \sin \varphi_1 \psi' + \\ &+ \sin \psi \cos \varphi_1 \varphi_1') + NK(-\sin \psi \sin \varphi_1 \psi' + \\ &+ \cos \psi \cos \varphi_1 \varphi_1') + NK(\cos \psi \cos \varphi_1 \psi' - \\ &\quad - \sin \psi \sin \varphi_1 \varphi_1'); \\ V_K^Y &= AB \cos \varphi_1 \varphi_1' - BN(-\sin \psi \sin \varphi_1 \psi' + \\ &+ \cos \psi \cos \varphi_1 \varphi_1') - BN(\cos \psi \cos \varphi_2 \psi' - \\ &- \sin \psi \sin \varphi_1 \varphi_1') - NK(-\sin \psi \cos \varphi_1 \psi' - \\ &- \cos \psi \sin \varphi_1 \varphi_1') + NK(\cos \psi \sin \varphi_1 \psi' + \\ &+ \sin \psi \cos \varphi_1 \varphi_1'). \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Продифференцируем полученное выражение (10) и определим ускорение точки **K** в проекциях на оси координатной системы OX и OY:

$$\left\{ \begin{aligned} a_K^X &= (V_K^X)' = AB(-\cos \varphi_1)(\varphi_1')^2 + BN(\cos \psi \cos \varphi_1 (\psi')^2 - 2\sin \psi \sin \varphi_1 \psi' \varphi_1' + \sin \psi \cos \varphi_1 \psi'' + \\ &+ \cos \psi \cos \varphi_1 (\varphi_1')^2 + \cos \psi \sin \varphi_1 \varphi_1'') + BN \\ &(-\sin \psi \sin \varphi_1 (\psi')^2 + 2\cos \psi \cos \varphi_1 \psi' \varphi_1' + \\ &+ \cos \psi \sin \varphi_1 \psi'' - \sin \psi \sin \varphi_1 (\varphi_1')^2 + \sin \psi \cos \varphi_1 \varphi_1'') - NK(\cos \psi \sin \varphi_1 (\psi')^2 + 2\sin \psi \cos \varphi_1 \psi' \varphi_1' + \\ &+ \sin \psi \sin \varphi_1 \psi'' + \cos \psi \sin \varphi_1 (\varphi_1')^2 + \\ &+ \cos \psi \cos \varphi_1 \varphi_1'') - NK(\sin \psi \cos \varphi_1 (\psi')^2 + \\ &+ 2\cos \psi \sin \varphi_1 \psi' \varphi_1' - \cos \psi \cos \varphi_1 \psi'' + \\ &+ \sin \psi \cos \varphi_1 (\varphi_1')^2 + \sin \psi \sin \varphi_1 \varphi_1''); \\ a_K^Y &= (V_K^Y)' = -AB \sin \varphi_1 (\varphi_1')^2 + BN(\cos \psi \sin \varphi_1 (\psi')^2 + 2\sin \psi \cos \varphi_1 \psi' \varphi_1' + \sin \psi \sin \varphi_1 \psi'' + \\ &+ \cos \psi \sin \varphi_1 (\varphi_1')^2 - \cos \psi \cos \varphi_1 \varphi_1'') + \\ &+ BN(\sin \psi \cos \varphi_1 (\psi')^2 + 2\cos \psi \sin \varphi_1 \psi' \varphi_1' - \\ &- \cos \psi \cos \varphi_1 \psi'' + \sin \psi \cos \varphi_1 (\varphi_1')^2 + \sin \psi \sin \varphi_1 \varphi_1'') + NK(\cos \psi \cos \varphi_1 (\psi')^2 - 2\sin \psi \sin \varphi_1 \psi' \varphi_1' + \\ &+ \sin \psi \cos \varphi_1 \psi'' + \cos \psi \cos \varphi_1 (\varphi_1')^2 + \\ &+ \cos \psi \sin \varphi_1 \varphi_1'') + NK(-\sin \psi \sin \varphi_1 (\psi')^2 + \\ &+ 2\cos \psi \cos \varphi_1 \psi' \varphi_1' + \cos \psi \sin \varphi_1 \psi'' - \\ &- \sin \psi \sin \varphi_1 (\varphi_1')^2 + \sin \psi \cos \varphi_1 \varphi_1''). \end{aligned} \right. \quad (11)$$

На основании выведенных систем уравнений были получены графики скоростей и ускорений в системе символьных вычислений Maple 17 и в системе SolidWorks:

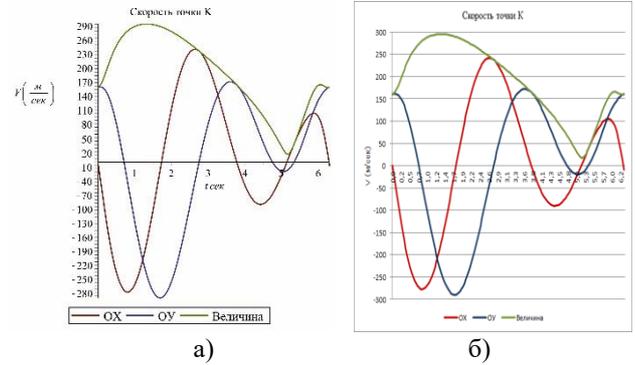


Рис.5. Графики скорости характерной точки **K**:
а) – получены в системе символьных вычислений Maple 17,
б) – получены в системе SolidWorks

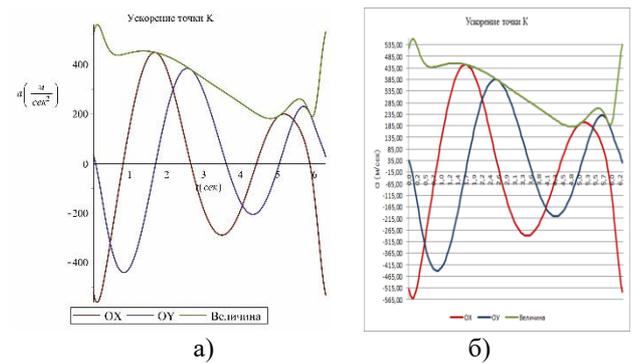


Рис.6. Графики ускорения характерной точки **K**:
а) – получены в системе символьных вычислений Maple 17,
б) – получены в системе SolidWorks

Дифференцируя уравнения (4) и (9) по времени t можно найти уравнения для определения угловых скоростей и ускорений звеньев BC и CD. Ниже представлены эти уравнения:

$$\omega_{BC} = \frac{d\psi}{dt}; \quad \omega_{CD} = \frac{d\gamma}{dt}; \quad \varepsilon_{BC} = \frac{d^2\psi}{dt^2}; \quad \varepsilon_{CD} = \frac{d^2\gamma}{dt^2}. \quad (12)$$

На рисунках (7) и (8) представлены результаты расчетов угловых скоростей и ускорений на промежутке времени $0 \leq t \leq 6.3$ (сек), решенных с помощью двух разных систем вычислений:

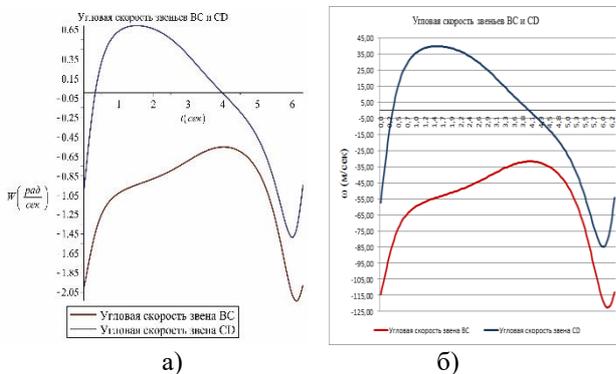


Рис.7. Графики угловых скоростей звеньев BC и CD:
а) – получены в системе символьных вычислений Maple 17,

б) – получены в системе SolidWorks

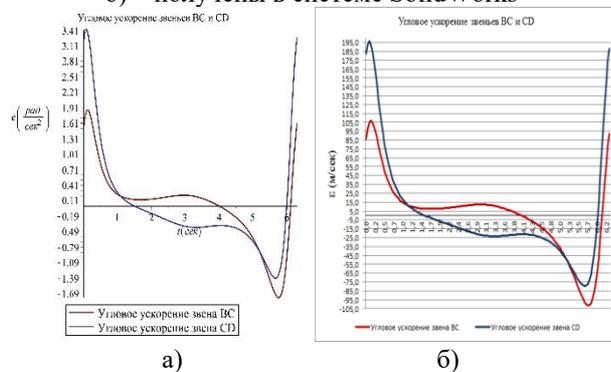


Рис.8. Графики угловых ускорений звеньев BC и CD:
а) – получены в системе символьных вычислений Maple 17,

б) – получены в системе SolidWorks

Выводы

На основании анализа графиков (рис. 3-8) установлено, что расчеты кинематических параметров линейных и угловых скоростей и ускорений, вычисленных двумя различными способами, полностью совпадают между собой. Это показывает корректность полученных аналитических уравнений.

На основании анализа графиков получены следующие выводы:

1. Характерные точки E и K движутся с переменными скоростями и ускорениями.
2. Равномерное вращательное движение ведущих звеньев AB и AD преобразуется в неравномерное вращательное движение звеньев BC и CD с переменными угловыми скоростями и ускорениями относительно неподвижной системы координат.

3. Полученные формулы (2-12) и их результаты в виде графиков показывают, что характерные точки E и K двухподвижного плоского рычажного пятизвенного механизма совершают сложное планетарное движение.

4. Результаты расчетов полученных на основании решения уравнений кинематики показывают сложный характер движения, как характерных точек, так и шатунов, что является основой предполагать перспективность использования двухподвижного плоского пятизвенного рычажного механизма в качестве базовых механизмов при создании различных мехатронных устройств, инновационных технологий в машиностроении, сельском хозяйстве, в строительстве, в медицине и других отраслях промышленности.

Полученные нами уравнения кинематики являются универсальными и пригодны для определения положений, скоростей и ускорений характерных точек для двухподвижных плоских пятизвенных механизмов. Эти уравнения могут применяться для разных структурных параметров звеньев, для различных входных координат, и они представлены в удобном для инженерных расчетов виде.

Список литературы

- [1]. Яруллин М.Г., Мингазов М.Р., *Способ образования двух подвижных 5R-Механизмов*, Научные труды III-й Международной научной конференции «Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении». – М. Издательский дом «Спектр», – с.380-382, 2014
- [2]. R.Alizade, *Structural Design of Parallel Manipulators with General Constraint One*. Mechanism and Machine Theory, Volume 45, Issue 1, pp. 1-14, et. al., 2010
- [3]. Пат. 154612 на полезную модель МПК F16H 21/10, F16H 21/26. *Плоский дифференциальный шарнирно-рычажный механизм*, Яруллин М.Г., Мингазов М.Р., Исянов И.Р., опублик. 27.08.2015 Бюл. № 24.
- [4]. Яруллин М.Г., Исянов И.Р. *Двухподвижный пятизвенный рычажный механизм*, Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2015. – №2. – С. 97-102.