Proceedings of the International Symposium of Mechanism and Machine Science, 2017
AzC IFToMM – Azerbaijan Technical University
11-14 September 2017, Baku, Azerbaijan

Полиноминальное Интерполяционное Сглаживание Крыловых Профилей

Рамиз САДЫХОВ, Фуад МЕЛИКОВ
Национальная Академия Авиации Азербайджана, AZ1045, Баку, пр. Мардакян 30.
E-mail: sadixov@mail.ru, fuadmalikov08@gmail.com

Аннотация: Рассматривается кусочно-полиномиальное сглаживание экспериментальных данных с автоматической стыковкой без учета шумов измерений, на примере интерполяционного сглаживания крыловых профилей.

Ключевые слова: методы интерполяционного профилирования крыловых профилей.

Введение. При сглаживании экспериментальных данных, содержащих области разной степени гладкости, обычно применяемые в подобных случаях регрессионные модели со степенными и ортогональными полиномами не всегда приводят к удовлетворительным результатам. В связи с этим представляет интерес рассматривать кусочно-полиноминальные модели, которые позволяют строить эффективные алгоритмы аппроксимации при наличии областей разной степени гладкости. С указанной целью, исходя из априорных представлений о степени гладкости экспериментальных данных, выбирают элементарный интервал обработки объемом в n точек. В пределах этого интервала сглаживание производят полиномом до четвертой степени [1-5].

Следует иметь в виду, что с увеличением степени аппроксимирующего полинома возрастает случайная ошибка, а методическая ошибка уменьшается. С другой стороны, чем больше интервал сглаживания (а, следовательно, и количество измерений), тем в большей степени можно уменьшать влияние случайных ошибок. Поэтому порядок аппроксимирующего полинома и интервал сглаживания выбирают так, чтобы при проведении операции сглаживания обеспечивался минимум их суммы.

Пусть модель экспериментальных данных элементарного интервала имеет вид:

$$z_y = y + \delta_y\ , \tag{1}$$

где δ_y– аддитивные погрешности измерений с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Определение параметров аппроксимации, начиная со второго интервала, осуществляется с учетом стыковки полиномов по функции, первой, второй и третьей производной. Как показывает опыт практического опробования разработанного на основе метода наименьших квадратов (МНК) алгоритма, оптимальным в смысле результата и затрат машинного времени, при окне аппроксимации от 10 до 30 точек является следующий выбор параметров: степень полинома 3 и число условий 3 – стыковка по функции, первой и второй производным.

Кусочно-полиномиальная интерполяция методом наименьших квадратов. Допустим, что для интерполяции участков траекторных измерений движения летательных аппаратов (ЛА) используется полином третьего порядка, то есть

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \tag{2}$$

Уравнение измерений выходной координаты Y для этого случая запишется в вид:

$$Z_y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \delta_y\ . \tag{3}$$

Тогда модель экспериментального материала для рассматриваемого участка (интервала) можно представить в следующем матричном виде:

$$Z_y = x\Theta + \delta_y\ ,$$

где $Z_y = \|z_{1y}, z_{2y}, \dots z_{ny}\|^{\mathrm{T}}$ - вектор измерений выходной координаты y; $\Theta = \|a_0, a_1, a_2, a_3,\|^T$ – вектор искомых коэффициентов.

X= $\left\|\begin{matrix} 1\; x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1\; x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \cdot\;\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots\;\;\vdots & \vdots & \vdots \\ 1\; x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{matrix}\right\|$ - структурная матрица; n - количество точек в рассматриваемом интервале.

Обычно для оценки коэффициентов полинома (2) используется МНК следующего вида (4)

$$\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1}\left(X^T Z_y\right), \tag{4}$$

$$D_\Theta = (X^T X)^{-1}\sigma^2, \tag{5}$$

где D_Θ - дисперсионная матрица ошибок оценок.

Оценки коэффициентов для первого участка интерполяции получаем по формуле (4). Начиная со второго, компоненты вектора $\hat{\Theta}$ рассчитываются по экспериментальным данным их этого участка, но с учетом параметров, найденных на предыдущем участке. Поэтому каждый последующий участок траектории движения ЛА будем выбирать с перекрытием. При этом целесообразно использовать следующие линейные связи между оцененными параметрами предыдущего участка $\hat{\Theta}_{N-1}$- искомыми $\hat{\Theta}_N$ N - го участка:

$$\mathrm{A}\Theta_{N=}\mathrm{V}, \tag{6}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1\; x_e\; x_e^{\,2} & x_e^3 \\ 0\; 1\;\; 2_{xe} & 3x_e^2 \\ 0\;\;\; 0\; 2 & 6x_e \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$V = \begin{bmatrix} \hat{a}_{ON-1} + \hat{a}_{1N-1}X_e + \hat{a}_{2N-1}X_e^2 + \hat{a}_{3N-1}X_e^3 \\ \hat{a}_{1N-1} + 2\hat{a}_{2N-1}X_e + 3\hat{a}_{3N-1}X_e^2 \\ 2\hat{a}_{2N-1} + 6\hat{a}_{3N-1}X_e \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где e= (N-1)(n-L); L - число точек.

Формулы (6)-(8) описывают связи, которые обеспечивают стыковку участков интерполяции по функции первой и второй производным. Если ограничиться только стыковкой по функции, то можно оставит первую строку матрицы A и первую компоненту вектора V, а если только по функции и первой производной, то можно оставить только две первые строки матрицы A и две первых компонента вектора V.

Учитывая равноточность измерений, задачу определения неизвестных коэффициентов модели в этом случае можно сформулировать как задачу на условный экстремум: минимизация квадратичной функции

$$(Z_y - X\Theta)^T \sigma^2 I (Z_y - X\Theta)$$

при ограничивающем условии (6). Здесь I - единичная матрица.

С целью решения таких задач обычно используют метод неопределенных множителей Лагранжа. В результате можно получить следующие выражения для оценивания вектора коэффициентов Θ при наличии линейных связей (6) [6]:

$$\breve{\Theta}^T = \hat{\Theta}^T + (V^T - \hat{\Theta}^T A^T)[A(X^T X)^{-1}A^T]^{-1}\;\; A(X^T X)^{-1}, \tag{9}$$

$$D_{\breve{\Theta}} = D_{\hat{\Theta}} - (X^T X)^{-1}A^T[A(X^T X)^{-1}A^T]^{-1}\, A(X^T X)^{-1}\sigma^2. \tag{10}$$

Подставляя матрицы A,X и векторы Z и V в формулы (4), (5), (9) и (10), получим оценку вектор коэффициентов для участка траектории движения ЛА с номером N, а также дисперсионную матрицу ошибок оценок.

В результате последовательного применения описанной процедуры с использованием экспериментальных данных получим кусочно-полиномиальную интерполяцию исследуемого участка с автоматической стыковкой.

Результаты обработки с помощью предложенного алгоритма многочисленных экспериментальных данных показывают, что чем больше степень полинома и чем меньше количество условий, тем ближе оказывается интерполяционная кривая к экспериментальным данным. Однако, проводя стыковку только по функции, мы можем получить на интерполированной кривой разрывы первой и второй производных, что особенно нежелательно при оптимальном проектировании крыловых профилей самолетов.

На основе поведенных экспериментальных исследований показано, что оптимальным перекрытием в большинстве случаев является 50% перекрытие.

Интерполирование полиномиальными сплайнами. Помимо кусочно-полиномиальной регрессии существуют полиномиальные сплайны, которые не являются ни аналитическими функциями, ни статистическими моделями.

Сплайны кусочно являются полиномами (на практике наиболее популярны интерполяционные сплайны невысоких нечетных степеней: третьей, пятой) подчиненными условию непрерывности функции и производных (первой наклона и второй кривизны в случае кубических сплайнов) в общих точках соседних участков.

Известно, что кубический сплайн-функцией является такая функция из класса W_2^2 ($W_2^2 -$ класс функций, имеющие суммируемые с квадратом вторые производные), которая принимает в узлах сетки заданное значение и минимизирует функционал,

$$\int_{t_1}^{t_N} [z''(t)]^2\, dt = \min_{w_2^2}$$

то есть имеет минимальную кривизну среди всех непрерывных гладких кривых, соединяющих экспериментальные точки.

При решении задачи сплайновой кусочно – полиномиальной интерполяции замкнутой кривой y (каким является, например, профиль крыла ЛА произвольной формы) воспользуемся ее параметрическими представлением. Пусть кривая y представима конечным числом дискретных точек (произведены точные дискретные измерения) в виде набора периодических кубических сплайнов двух типов.

$$\left((t_j, x_j), (t_j, y_j)\right) = (t_j, z_j), z_j = (x_j, y_j), (j = \overline{1, N}),$$

$$t_j < t_2 <_{\dots}< t_N, t_{N+1} = t_1, X_{N+1} = X_1, Y_{N+1} = Y_1.$$

Тогда восстановление сплайна S(z(t)) , его первой S'(z(t)) и второй S''(z(t)) производных в любой точке z(t)= (x(t), y(t)), где $t \in [0, l]$, $l = \sum_{j=1}^{N} h_j, h_j = |z_j - z_{j-1}|, (j = \overline{1, N})$, осуществляются формулами:

$$S(z(t)) = z_{j-1}(t_j - t)^3/6h_j + z_j''(t - t_{j-1})^3/6h_j + (z_{j-1} - z_{j-1}'' h_j^2/6) \; * \\ * \, (t_j - t)/h_j + (z_j - z_j'' h_j^2/6)(t - t_{j-z})/h_j, \tag{11}$$

$$S''(z(t)) = -z_{j-1}''(t_j - t)^2/2h_j + z_j''(t - t_{j-1})^2/2h_j + (z_j - z_{j-1})/h_j - (z_j'' - z_{j-1}'')/h_j \tag{12}$$

$$S''(z(t)) = z_{j-1}''(t_j - t)/h_j + z_j''(t - t_{j-1})/h_j\ , \tag{13}$$

где z_j'' - вторые производные по сплайну.

Отметим, что формула (11) используется при профилировании крыльев произвольной формы ЛА, движущихся в идеальной невязкой среде, а также для визуализации с высокой точностью на графических устройствах и нашла широкое применение в интерактивных вычислительно-графических системах при построении аэрогидродинамических и газодинамических моделей [3]. Если на каждом из участков h_j профиля Y взять равномерное разбиение с количеством узловых точек M_j, то после несложных преобразований получим простые и эффективные с точки зрения реализации на ЭВМ формулы

$$S(z(t)) = -z''_{j-1}\left(\frac{m_j}{M_j}-1\right)\left(\frac{m_j}{M_j}\right)\left(\frac{m_j}{M_j}-2\right) + z''_j\left(\frac{m_j}{M_j}-1\right)\left(\frac{m_j}{M_j}\right)\left(\frac{m_j}{M_j}+1\right) - z_{j-1}\left(\frac{m_j}{M_j}-1\right) + z_j\left(\frac{m_j}{M_j}\right).$$
$$(m_j = \overline{0, M_j}; \; j = \overline{2, N+1}) \quad (14)$$

Аналогично интерпретацию получают формулы (12), (13).

Для нахождения вектора вторых производных по сплайну $Z'' = \|z''_1, z''_2, \dots z''_N\|^{\mathrm{T}}$ Необходимо решить систему уравнений

$$AZ'' = 6B\hat{Z} \quad (15)$$

откуда,

$$Z'' = A^{-1}B\hat{Z} \quad (16)$$

где

$$A = \left\| \begin{matrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 & h_1 \\ h_2 & 2(h_2+h_3)h_3 & & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ h_1 & 0 & 0 & \dots & h_N & 2(h_N+h_1) \end{matrix} \right\| \quad (17)$$

$$B = \left\| \begin{matrix} h_1^{-1} & -(h_1^{-1}+h_2^{-1}) & h_2^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{-1} & -(h_2^{-1}+h_3^{-1}0 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(h_N^{-1}+h_1^{-1}) & h_1^{-1} \end{matrix} \right\| \quad (18)$$

$\hat{Z} = \|\hat{Z}_1, \hat{Z}_2 \dots, \hat{Z}_N\|^{\mathrm{T}}$ - вектор измеренных или вычислительных координат точек $\hat{z}_j = (\hat{x}_j, \hat{y}_j), (j = \overline{1, N})$ профиля у.

Матрица А симметричная с трех-диагональным преобладанием и по теореме Гершгорна о локализации собственных значений она положительно определена, следовательно, неособенная. Значит, коэффициенты $z''_1, z''_2, \dots, z''_N$ определяются из (16) однозначно. В связи с чем, сплайн функция S(z(t)) имеет единственное решение. Для решения (15) использовался метод прогонки.

Если уравнение кубического сплайна записать в явном полиномиальном виде.

$$S(z(t)) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad (19)$$

то коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3,определяющих j-й сплайн (то есть линию, связывающую точки z_j and z_{j+1}, вычисляется следующим образом

$$\begin{gathered} a_0 = z_j; \\ a_1 = z'_j; \\ a_2 = \frac{z''_j}{2} = 3(z_{j+1} - z_j)h_{j+1}^{-2} - 2z'_j h_{j+1}^{-1} - z'_{j+1}h_{j+1}^{-1} \\ a_3 = z'''_j/6 = 2(z_j - z_{j+1})h_{j+1}^{-3} + z'_j h_{j+1}^{-2} + z'_{j+1}h_{j+1}^{-2} \end{gathered} \quad (20)$$

Для нахождения касательных векторов во внутренних точках, в которых наклон линии одинаков по обе стороны сочленения, необходимо решить уравнение

$$A' Z' = 3B' \hat{Z}, \quad (21)$$

Откуда

$$Z' = A'^{-1} 3B' \hat{Z}, \quad (22)$$

где $Z' = \|z'_1, z'_2, z'_N\|^{\mathrm{T}}$, - вектор первых производных по сплайну,

$$A' = \left\| \begin{matrix} 2(h_1+h_2) & h_1 & 0 & \dots & 0 & h_2 \\ h_3 & 2(h_2+h_3) & h_2 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \cdot \\ h_N & 0 & 0 & \dots & h_1 & 2(h_N+h_1) \end{matrix} \right\| \quad (23)$$

$$B' = \left\| \begin{matrix} h_2 h_1^{-1} & (h_2 h_1^{-1} - h_1 h_2^{-1}) & h_1 h_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_3 h_2^{-1} & (h_3 h_2^{-1} - h_2 h_3^{-1}) & \vdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (h_1 h_N^{-1} - h_N h_1^{-1}) & h_N h_1^{-1} \end{matrix} \right\| \quad (24)$$

Матрица A с трехдиагональным преобладанием положительно определена (по теореме Гершгорна о локализации собственных значений), следовательно, неособенная. Значит, коэффициенты определяются $z_1^{"}, z_2^{"}, \dots, z_N^{"}$ из (22) однозначно. В связи с чем, сплайн-функция S(z(t)) также однозначно восстанавливается по формулам (19), (20) и задача о нахождении кусочно-кубической функции S(z(t)) имеет единственное решение. Для решения (21) использовался метод прогонки. Для вычисления наклонов $z_j^{'}, (j = \overline{1,N})$ можно воспользоваться также значениями $z_j^{"}, (j = \overline{1,N})$ найденных из решения (15), используя следующее соотношения.

$$z_j^{'} = -z_j^{"} h_{j+1}/3 - z_{j+1}^{"} h_{j+1}/6 + (z_{j+1} - z_j) h_{j+1}^{-1} \tag{25}$$

Отметим, что сплайн-функцию S(z(t)) в отличие от формулы (19) можно восстановить также по следующей формуле (после решения (21)

$$S\big(z(t)\big) = z_{j-1}^{'}(t_j - t)^2(t - t_{j-1})/h_j^2 - z_j^{'}(t - t_{j-1})^2(t_j - t)/h_j^2 + z_{j-1}(t_j - t)^2\big(2\big(t - t_{j-1}\big) + h_j\big)/h_j^{-3}$$
$$+ z_j(t - t_{j-1})^2\big(2\big(t_j - t\big) + h_j\big)/h_j^{-3}$$

Длины дуг (участки профиля лопатки или контура канала охлаждения), их длина (l), ограничиваемая ими площадь (P) и координаты центра ($x_c\ y_c$) определяются следующим образом

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} ((S^{\cdot}\big(x(t)\big))^2 + ((S^{\cdot}\big(x(t)\big))^2)^{\frac{1}{2}} dt, \qquad j = \overline{1,N} \tag{26}$$

$$l = \sum_{j=1}^{N} \int_{t_j}^{t_{j+1}} ((S^{\cdot}\big(x(t)\big))^2 + (S^{\cdot}\big(x(t)\big))^2)^{1/2}\, dt, \tag{27}$$

$$P = 1/2 \int_{\gamma} (S(x(t))\, S^{\cdot}(y(t)) - S^{\cdot}(x(t)) S(y(t))) dt \tag{28}$$

$$x_c = P^{-1} \int_{\gamma} (S(x(t))\, S\big(y(t)\big) S^{\cdot}\big(x(t)\big) dt,\ y_c = P^{-1} \int_{\gamma} (S(x(t))\, S\big(y(t)\big) S^{\cdot}\big(y(t)\big) dt \tag{29}$$

Для вычисления интегралов (26), (27), (28), (29) использовалась формула трапеции. Следует отметить, что сплайн – квадратура для периодических сплайнов (замкнутых кривых) является просто формулой трапеции. Однако в случае разомкнутых кривых будем иметь следующую формулу

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{t_j}^{t_{j+1}} S\big(z(t)\big) dt = \sum_{j=1}^{N} \frac{z_j + z_{j+1}}{2} h_j - \sum_{j=1}^{N} \frac{z_j^{"} + z_{j+1}^{"}}{24} h_j^3$$

то есть формула сплайн-квадратуры есть формула трапеций плюс поправочный член, который аппроксимирует ошибку самой формулы трапеции.

Для проверки точности предлагаемых формул были проведены числовые расчеты на персональном компьютере. Рассматривался крыловой профиль, на контуре которого взято равномерное разбиение из 8 точек, координаты первой из которых были (10мм, 0м). Сравнительный анализ проводился с расчетными данными, произведенными по конечно-разностной формуле (КРФ).

$$z_j^{'} = \big(z_j - z_{j-1}\big) h_j^{-1} + \big(z_{j+1} - z_j\big) h_{j+1}^{-1} - (z_{j+1} - z_{j-1})(h_j + h_{j+1})^{-1} \tag{30}$$

Результаты вычислительных экспериментов приведены в таблице 1. В этой таблице вначале приводятся расчетные значения, произведенные с использованием формулы (30), будем обозначать их через КРФ, а затем – расчетные значения, произведенные с использованием сплайнов – (СПЛ). Длина окружности (контура охлаждения канала) вычисленная с использованием КРФ, составляет 61.2288мм, то есть относительная погрешность равна 2.5%. Длина этой же окружности, вычисленная по СПЛ, составляет 62.7936 мм, то есть относительная погрешность равна 0.061%. Площадь круга, вычисленная по КРФ, равнялась 282.843 мм^2, что составляло 9.9% погрешности, а с использованием СПЛ – 313.652 мм^2, то есть 0.17%. Координаты центра круга, вычисленные с использованием СПЛ, равнялись x_c = 0.17501x 10^{-6} и y_c= - 0,45774 x 10^{-5}.

Следует отметить, что в большинстве случаев интерполяционные сплайны дают хорошие результаты в отношении качественного поведения, то есть сохранения монотонности экспериментальных данных, выпуклости и т.д. Однако при больших градиентах в экспериментальных данных на сравнительно редких сетках возможны осцилляции (от них свободны только сплайны первой степени, изображаемые ломанными).

Таблица 1. Результаты вычислительных экспериментов

№	x		y		l	
	КРФ	СПЛ	КРФ	СПЛ	КРФ	СПЛ
1	0.0000	0.0000	0.9238	1.0230	7.6536	7.8492
2	-0.6532	-0.7239	0.6532	0.7239	7.6536	7.8492
3	-0.9238	-1.0230	0.0000	0.0000	7.6536	7.8492
4	-0.6532	-0.7239	-0.6532	-0.7239	7.6536	7.8492
5	0.0000	0.0000	-0.9238	-1.0230	7.6536	7.8492
6	0.6532	0.7239	-0.6532	-0.7239	7.6536	7.8492
7	0.9238	1.0230	0.0000	-0.0000	7.6536	7.8492
8	0.6532	0.7239	0.6532	0.7239	7.6536	7.8492

Для улучшения геометрических свойств кубических сплайнов в их структуру вводят дополнительные параметры, выбором которых можно управлять качественным поведением графиков получаемых кривых (сплайны с натяжением или экспоненциальные, рациональные, сплайны с дополнительными узлами и т.д.)

Задача о построении сплайнов с заданными геометрическими характеристиками была формализована А.И. Гребенниковым, который задачу улучшения геометрических характеристик сплайнов (особенно кубических) назвал задачей изо геометрической аппроксимации. В последующем Ю.А. Флеров стал использовать термин «консервативная интерполяция», который подчеркивает сохранение качественных характеристик экспериментальных данных.

Таким образом решение проблемы идет двумя путями [5]:

- варьируется параметры полиномиального сплайна с целью обеспечения требуемых свойств.
- в структуру кубического сплайна вводятся дополнительные параметры, выбором которых можно управлять качественным поведением графиков получаемых кривых.

Например, для нахождения вторых производных по сплайну $Z'' = \|z_1'', z_2'', \dots z_N''\|^{\mathrm{T}}$ вместо решения системы уравнений (15) необходимо решить следующую систему линейных уравнений

$$h_{j-1}z_{j-1}'' + (2+p)(h_{j-1}+h_j)z_j'' + h_j z_{j+1}'' = 2(p^2+3p+3)\left(\frac{z_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{z_j - z_{j-1}}{h_j}\right), j = \overline{2, n-1}; p = const$$

Для p=0 получим систему (15), т.е. имеем стандартные кубический сплайн.

Гладкие интерполяционные восполнения. Приведем другой способ гладкого интерполяционного восполнения, например, профилей охлаждаемых лопаток авиационных ГТД, профилей крыльев ЛА произвольной формы или траекторий движения ЛА по точно измеренным или вычисленным значениям координат в конечной системе дискретных точек (смотри первый и второй пункты статьи [1-3]), отличный от метода сплайн-функции также эффективный с точки зрения реализации на компьютерах.

Предположим, что известны значения $z_1, z_2, \dots, z_N$ в узлах некоторой фиксированной сетки $t_1 < t_2 < \cdots, t_N$, где достаточно велико.

Построим интерполяционную кусочно-полиномиальную функцию класса гладкости (t_j, t_{j+1}), $\frac{C^S}{(j=1,N-1-s}$ на интервалах. Степень полиномов на интервалах сетки равна 2s+1.

Обозначим P(t) многочлен Лагранжа степени не выше s, совпадающий с заданными значениями в узлах сетки

$$\left.\frac{d^k Q}{dt^k}\right|_{t=t_j} = \left.\frac{d^k p}{dt^k}\right|_{t=t_j}$$

$t_j, t_{j+1}, , \dots t_{j+s}$, а через U(t) – многочлен Лагранжа степени не выше s, принимающий заданные значения в узлах $t_{j+1}, t_{j+2}, , \dots t_{j+1+s}$.. Далее, построим многочлен Q(z(t)) степени не выше 2s+1, который удовлетворяет условиям

$$\left.\frac{d^k Q}{dt^k}\right|_{t=t_{j+1}} = \left.\frac{d^k u}{dt^k}\right|_{t=t_{j+1}}$$

$(k = 0,1,2, \dots, s; j = 1,2, \dots, N-1-s)$
Зафиксируем целое число s<<N. Пусть s=1, тогда многочлен третьей степени запишется в виде

$$Q(z(t))=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3 \ ,$$

а его коэффициенты вычисляются по формулам (выполняются условия гладкости функции и первой производной).

$$a_0 = z_{j,}$$
$$a_1 = (z_{j+1} - z_j)h_{j+1}^{-1}$$
$$a_2 = -((z_{j+2} - z_{j+1})h_{j+2}^{-1} - (z_{j+1} - z_j)h_{j+1}^{-1})h_{j+1}^{-1}$$
$$a_3 = ((z_{j+2} - z_{j+1})h_{j+2}^{-1} - (z_{j+1} - z_j)h_{j+1}^{-1})h_{j+1}^{-1}$$
$$j = 1, N-1-s$$

Если положить s=2 (что соответствует гладкости кубических сплайнов т.е. выполняются условия гладкости функций, первой и второй производной), то будем иметь дело с многочленами пятой степени.

Преимущество такого интерполирования заключается в том, что не нужно решать систему линейных алгебраических уравнений типа (15), (21), хотя степень многочлена выше на два.

Конечно элементное восстановление профилей. Восстанавливается гладкая кривая $Z(t), t \in [t_1, t_N]$ С минимальной кривизной.

$$\int_{t_1}^{t_N} z''(t)^2\, dt = \min_{W_2^2} . \tag{31}$$

По известным значениям в дискретных точках

$$z(t_i) = z_i, \quad i = \overline{1, N} \tag{32}$$

Представляется Z (t) в виде линейной комбинации конечного множества базисных функций

$$Z(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_N t^N = C(t)\theta \ , \tag{33}$$

где $C(t) = \|1, t, t^2, \dots t^N\|$; $\theta = \|a_0, a_2, \dots, a_N\|^{\mathrm{T}}$. Подставляется (33) в (31), (32) и после преобразований получается: минимизировать

$$\frac{1}{2}\theta^T H \theta \tag{34}$$

при ограничениях

$$C\theta = B \tag{35}$$

где $C = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^N \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^N \\ 1 & t_N & t_N^2 & \cdots & t_N^N \end{vmatrix}$; $H = 2\int_{t_1}^{1N} C''(t)^T C''(t)dt; B = \|z_1, z_2, \dots, z_N\|^{\mathrm{T}}$.

Решение задачи (34) – (35) находится с помощью множителей Лагранжа: задача без условной оптимизации

$$\frac{1}{2}\theta^T H\theta + \boldsymbol{\lambda}(C\theta - B), \tag{36}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = \|\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}, \dots, \boldsymbol{\lambda_N}\|^{\mathbf{T}}$ **.** В результате, для нахождения неизвестных $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\theta}$. Из (36) получается следующая система линейных уравнений.

$$\begin{Vmatrix} H & C^T \\ C & O \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \theta \\ \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O \\ B \end{vmatrix} \tag{37}$$

Численный пример 1. Пусть функции Z(t) является кубическим полиномом

$$Z(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, t \in [0,1]$$

При известных z (0) = 1, z (0.5)=6, z(1)=4. Тогда

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$C^T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & 1/8 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$H = 2 \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{Vmatrix}$$

$B = \|1{,}6{,}4\|^{\mathrm{T}}$. Подставляя значения H, B, C, C^T в (37) получается следующая система уравнений

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 1/8 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \\ \boldsymbol{\lambda}_3 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \end{vmatrix}$$

Решив которую находится $a_0 = 1, a_1 = 17\,, a_2 = -14, \;\; a_3 = 0$. Заметим, матрица в уравнении (37) плохо обусловленная, и итерационные методы, используемые для решения больших разреженных систем, отличаются медленной сходимостью. Одно из решений этой проблемы-использование в качестве конечных элементов Вейвлетов [6].

Разработанные алгоритмы реализованы в виде Фортран программ на основе модульного принципа, т.е. в типовом унифицированном виде. Одним из преимуществ этих программ является то, что они не используют библиотечные подпрограммы из системы программного обеспечения конкретного компьютера, а только встроенные элементарные функции алгоритмического языка фортран.

Как показали вычислительные эксперименты, построенные крыловые профиля надежны и имеют практическую значимость в системах профилирования крыла самолета с механизацией.

Литература

[1]. Жданюк Б. Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений – М.: Сов. Радио, 1978, 384с.
[2]. Аронов В. И., Жуковский М. И., Журавлев В. А. Профилирование лопаток авиационных газовых турбин/ Под ред. М. И. Жуковского. – М.: Машиностроение, 1975, 192 с.
[3]. Лифанов Н. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и числ енный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории
упругости и дифракции волн. – М.: ТОО Янус, 1990, 520с.
[4]. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессия. – М.: Финансы и статистика, 1981, 302с.
[5]. Квасов Б. И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006, 360с.
[6]. Стольниц Э., Де Роуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая графика". 2002 г.