Proceedings of the International Symposium of Mechanism and Machine Science, 2017
AzC IFToMM – Azerbaijan Technical University
11-14 September 2017, Baku, Azerbaijan

Резонансные колебания неуравновешенного вертикального гироскопического ротора с нелинейными характеристиками

Жарилкасин ИСКАКОВ

Алматинский Университет Энергетики и Связи, Институт Механики и Машиноведения
Алматы, Казахстан
E-mail: iskakov53@mail.ru

Абстракт
Рассматриваются резонансные колебания вертикального жесткого гироскопического ротора с мягкой нелинейной упругой характеристикой и вязким нелинейным демпфированием, у которого диск имеет перекос и дисбаланс массы. Особое внимание уделено влиянию перекоса диска и дисбаланса массы, нелинейного демпфирования на динамику ротора. Первое из них определяется характером поведения внешнего вынуждающего момента и влияет на амплитуду и фазу колебаний, а второе – реологическими свойствами демпфирующей среды и скоростью вращения вала ротора, влияет не только на амплитудно- и фазово-частотную характеристику, но и на устойчивость движения. Уравнения движения для системы с двумя степенями свободы, записанные в форме Лагранжа, разрешались методом разложения решений в ряд Фурье и методом гармонического баланса. Приближенный критерий устойчивости составлен на основании утверждения того, что вертикальная касательная к резонансной кривой соответствует границе устойчивости. Результаты исследований могут быть важными при разработке методов оптимального управления резонансными колебаниями, для определения оптимальных конструкционных параметров, диапазона рабочих скоростей и методов демпфирования и затухания колебаний ротора в пред проектных работах.

Ключевые слова: гироскопический ротор, дисбаланс массы, перекос диска, резонансные колебания, устойчивость движения, нелинейная характеристика, нелинейное демпфирование.

Введение

Как известно, высокоскоростные роторные машины широко применяются во многих отраслях промышленности (электроэнергетической, электронной и радиотехнической, пищевой, легкой, химической, нефтяной, медицинской, металлургической, космической, ядерной и др.). Высокий коэффициент полезного действия, малый удельный вес и высокая удельная мощность, сравнительно низкие затраты на изготовление и эксплуатацию, а также малая загрязненность окружающей среды ведут к расширению областей применения роторных машин. Следовательно, неудивительно, что роторные машины изучаются давно. Несмотря на это немало проблем, нерешенных, в частности связанных с совместным действием дисбаланса массы и перекоса диска на колебания и устойчивость при учете нелинейных характеристик и нелинейного демпфирования и впоследствии со стабилизацией резонансных нелинейных колебаний роторных машин.

Значительное количество работ посвящено определению положения и ориентации дисбаланса массы и перекоса диска и соответственно методам балансировки, управлению колебаниями ротора. В работах [1, 2] для полного описания динамики консольного ротора с двумя обобщенным дисбалансом внешнее демпфирование учитывалось во всех четырех уравнениях движения. Благодаря чему имели возможность правильно построить амплитудно- и фазово- частотные характеристики ротора, исследовать влияния на них дисбаланса массы и перекоса диска, консольности вала и внешнего сопротивления, сопоставить амплитуды колебаний на критических скоростях. В статье [3] рассматривается случай несимметричного ротора. Совместное влияние перекоса и дисбаланса массы диска приводит к тому, что прецессирующий ротор имеет необычную фазовую характеристику, причем фаза колебаний необязательно должна соответствовать ориентации дисбаланса на малых частотах вращения [4]. Это обстоятельство может существенно изменить методы балансировки ротора. В настоящее время существуют различные методы определения дисбаланса и балансировки. Так, например, в статье [5] предложены акустические методы определения дисбаланса массы ротора. Для определения дисбаланса может быть использован начальный вектор фазы (IPV), но этот метод иногда делает состояние равновесия не определенным. В статье [6] целевое соединение, которое включает в себя величину большой оси и начальный фазовый угол (IPA) орбиты прецессии представлено заменить IPV. Величина и угловое положение дисбаланса массы могут быть определены точно на величину большой оси и IPA, соответственно. В статье [7] предлагается активная схема управления поперечными колебаниями вала ротора из-за дисбаланса. Для этого использует электромагнитный возбудитель, установленный на статоре, в месте, удобном для управления поперечной вибрацией ротора, через воздушный зазор вокруг ротора. В работе [8] предлагается центрифуга с системой автоматического устранения колебаний центрифуги, порожденных ее дисбалансом. Два или более шаров внутри кольца, которые прикреплены к ротору, могут автоматически устранить его вибрации. Шары, которые также называются свободными элементами, смогут изменить свои позиций внутри кольца таким образом, чтобы компенсировать динамические силы. В статье объясняется, что шары занимают конечные положения, когда ротор и шары динамически стабильны. По сравнению с традиционной типа мяча балансировки [8] в статье [9] предлагается более надежный новый дизайн балансировки. В новой конструкции, шарики могут двигаться как радиальные и так и по окружению. Существует не более одного устойчивого равновесная конфигурация, при скорости вращения.

Привлекает внимание работы, посвященные нелинейным колебаниям в физических системах, в том числе роторных. В монографии Хаяси [10] подробно исследованы нелинейные колебания в физических системах с одной степенью свободы. Целью работы [11] является анализ резонансных кривых гармоник более высокого порядка в выражении для решения уравнения колебания с учетом зависимости их амплитуд и фаз от частоты и в предположении о неизменности величин амплитуды вынуждающей силы и коэффициента демпфирования. В работе [12] в отличие от предыдущей изучаются нелинейные резонансные колебания главной и других гармоник при учете силы нелинейного сопротивления. В статье [13] была изучена эффективность пассивных виброизоляторов с линейным затуханием и кубическим нелинейным затуханием в резонансных и нерезонансных областях колебаний. Здесь же приведен отличный обзор об исследованиях линейных и нелинейных виброизолирующих систем. В работе [14] в исследованиях дополнительно учтено влияние кубической нелинейной жесткости материала на производительность изолятора. В работе [15] рассматриваются колебания гибкого ротора на упругих опорах с нелинейной характеристикой, но не изучается взаимодействие с обобщенным дисбалансом диска.

Выше приведенный обзор исследований показывает, что слабо изучено совместное влияние дисбаланса массы и перекоса диска на резонансные колебания, особенно на устойчивость роторных машин при учете нелинейных факторов, имеющихся в реальных конструкциях и ограниченность исследований нелинейных систем с одной степенью свободы. Таким образом, исследования резонансных колебаний и устойчивости роторных машин с перекосом диска и дисбалансом массы с учетом нелинейной упругой характеристики опор и нелинейного вязкого демпфирования, технологии оптимального управления резонансными колебаниями приводящие к созданию новых надежно работающих роторных машин с оптимальными конструкционными параметрами, несомненно, являются актуальными.

Уравнения колебаний ротора с мягкой нелинейной упругой характеристикой и нелинейным сопротивлением

На рис. 1 представлена геометрическая схема ротора. Вал с длиной L установлен вертикально с

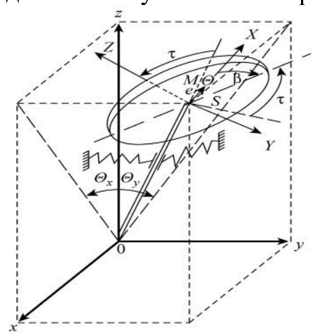

Рис.1. Геометрия ротора

помощью нижней шарнирной и отстоящей от нее на расстояние l_0 верхней упругой опоры. На свободном конце вала закреплен диск, имеющий массу m (веса G), полярный момент инерции I_p и поперечный момент инерции I_T, одинаковый для любого направления. Скорость вращения вала ω настолько большая, что ротор можно рассматривать как гироскоп, неподвижной точкой которого является нижняя опора вала. Положение геометрического центра диска S определяется координатами x, y, а положение вала и в целом ротора в пространстве углами θ_x, θ_y и углом поворота $\varphi = \omega t$. Предполагаем также, что линейный эксцентриситет e лежит на оси SX и отстает от плоскости углового эксцентриситета τ на угол β. Ограничимся малыми отклонениями оси ротора, поэтому будем учитывать в вычислениях только члены, линейные относительно малых величин $e, \tau, \theta_x, \theta_y$.

Верхняя упругая опора гироскопического ротора могут быть выполнены из нелинейных материалов, таких как сырой резины, каучука и других полимеров, широко используемых в качестве демпфера происходящих колебаний. Их выраженные рассеивающие свойства характеризуются нелинейно-вязким демпфированием, и они имеют мягкий или жесткий тип нелинейной упругой характеристики. В гироскопическом роторе коэффициент вязкого затухания μ_{e1} и коэффициент нелинейного члена вязкого затухания μ_{e2}, коэффициентом жесткости k_1 и коэффициентом в нелинейном члене упругой силы k_2.

Уравнения движения вертикального неуравновешенного гироскопического ротора были получены в работе [16]. Введя следующие безразмерные параметры

$$\begin{aligned}
&\varepsilon = e/L; l = l_0/L; \bar{t} = t\omega_0; \Omega = \omega/\omega_0;\\
&\bar{I}_p = I_p/(mL^2); \bar{I}_T = I_T/(mL^2);\\
&K_1 = k_1/\left(m\omega_0^2\right); K_2 = k_2 L/\left(m\omega_0^2\right);\\
&P = G/\left(mL\omega_0^2\right); \mu_1 = \mu_{e1}/\left(mL^2\omega_0\right);\\
&\mu_2 = \mu_{e2}/\left(mL^2\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\left(k_1 l_0^2 - GL\right)/\left[mL^2 - \left(I_p - I_T\right)\right]}$ -критическая скорость бездемпфирной линейной системы, используя обозначения выражений амплитуды

$$M = \sqrt{\left[\left(\Omega^2 + P\right)\varepsilon + H\tau\Omega^2\cos\beta\right]^2 + H\tau^2\Omega^4\sin^2\beta} \tag{2}$$

и начальной фазы

$$\gamma = \tan-1\frac{H\tau\Omega^2\sin\beta}{\left(\Omega^2 + P\right)\varepsilon + H\tau\Omega^2\cos\beta}, \tag{3}$$

выразив вынуждающий момент с одними гармоническими функциями, можно придать уравнениям движения компактный вид

$$\left(1+\bar{I}_T\right)\theta_x'' + \bar{I}_p\Omega\theta_y' + \mu_1\theta_x' + \mu_2\theta_x'^2 + \left(K_1\ell^2 - P\right)\theta_x + K_2\ell^3\theta_x^2 = M\cos\left(\Omega\bar{t} + \gamma\right), \tag{4}$$

$$\left(1+\bar{I}_T\right)\theta_y'' - \bar{I}_p\Omega\theta_x' + \mu_1\theta_y' + \mu_2\theta_y'^2 + \left(K_1\ell^2 - P\right)\theta_y + K_2\ell^3\theta_y^2 = M\sin\left(\Omega\bar{t} + \gamma\right), \tag{5}$$

где $H = I_p - I_T$ - условная толщина диска.

Амплитудно- и фазово-частотные характеристики и устойчивость колебаний на частоте основного резонанса

Аппроксимация решений уравнений (4) и (5) в случае основного резонанса простой гармоникой с частотой колебаний, равной частоте возмущающего момента удовлетворяет

$$\theta_x = A_0 + A\cos(\Omega\bar{t} - \alpha), \tag{6}$$

$$\theta_y = A_0 + A\sin(\Omega\bar{t} - \alpha). \tag{7}$$

После применения метода гармонического баланса [10-12] получаем амлитудно- и фазово-частотные зависимости

$$\begin{aligned}
&\left(K_1 l^2 - P\right)A_0 + K_2 l^3 A_0^2 + \frac{1}{2}\left(\mu_2\Omega^2 + K_2 l^3\right)A^2 = 0\\
&\left\{\left[\left(1-H\right)\Omega^2 - \left(K_1 l^2 - P\right) - 2K_2 l^3 A_0\right]^2 + \mu_1^2\Omega^2\right\}A^2 = M^2
\end{aligned} \tag{8}$$

$$tg\alpha = \frac{\left[(1-H)\Omega^2 - (K_1 l^2 - P) - 2K_2 l^3 A_0\right]tg\gamma + \mu_1\Omega}{(1-H)\Omega^2 - (K_1 l^2 - P) - 2K_2 l^3 A_0 - \mu_1\Omega tg\gamma} \tag{9}$$

При отсутствии нелинейных членов в уравнениях (4) и (5) из выражений (8) и (9) получаться результаты для линейной модели ротора [17].

Амплитудно-частотные опорные кривые обычно описывает соотношение между амплитудой и частотой свободных колебаний системы без демпфирования [18]. Полагая равными нулю выражение *M* обусловленное внешним моментом, и коэффициенты демпфирования μ_1 и μ_2 в уравнениях (8), получаем уравнение опорной кривой для колебаний на частоте основного резонанса

$$A = \sqrt{\left(K_1 l^2 - P\right)^2 - \left(1-H\right)^2\Omega^4}\Big/\left(\sqrt{2}K_2 l^3\right) \tag{10}$$

Здесь

$$\Omega \le \sqrt{\left(K_1 l^2 - P\right)/\left(1-H\right)}.$$

Из формулы (10) видно, что опорная кривая представляет собой параболу симметричную относительно оси Ω, чем больше величины K_2, тем больше наклона влево, опорной кривой.

$$f(\Omega, A) = \{[1-H)\Omega^2 - (K_1 l^2 - P) - 2K_2 l^3 A_0]^2 + \mu_1^2\Omega^2\}A^2 - M^2 = 0 \tag{11}$$

где

$$A_0 = [-\left(K_1 l^2 - P\right) + \sqrt{\left(K_1 l^2 - P\right)^2 - 2K_2 l^3\left(\mu_2\Omega^2 + K_2 l^3\right)A^2}\,]/\left(2K_2 l^3\right) \tag{12}$$

Геометрическое место точек, в которых амплитудные кривые для колебаний основного резонанса имеют вертикальные касательные, определяется уравнением [19]

$$\partial f/\partial A = 0. \tag{13}$$

Равенство (13) с учетом (11) приводит к уравнению

$$\{[(1-H)\Omega^2-\sqrt{\left(K_1l^2-P\right)^2-2K_2l^3\left(\mu_2\Omega^2+K_2l^3\right)A^2}\,]^2+$$
$$\mu_1^2\Omega^2\}\times\sqrt{\left(K_1l^2-P\right)^2-2K_2l^3\left(\mu_2\Omega^2+K_2l^3\right)A^2}+ \qquad (14)$$
$$+4K_2l^3\left(\mu_2\Omega^2+K_2l^3\right)A[(1-H)\Omega^2-$$
$$-\sqrt{\left(K_1l^2-P\right)^2-2K_2l^3\left(\mu_2\Omega^2+K_2l^3\right)A^2}\,]=0$$

Уравнение (14) описывает граничные кривые области устойчивости для колебаний на частоте основного резонанса. Следовательно, геометрическое место точек, в которых амплитудные кривые имеют вертикальные касательные, определяют границы области устойчивости.

Числовые результаты и оценка влияния параметров

Вычисления по формулам (2) и (3) и решение системы уравнений (8), (9) и (14) производились на компьютере численным методом в системе символьных вычислений «Maple 11» для следующих параметров ротора:

$H=+0{,}1:\ \varepsilon=0{,}01;\ \tau=0{,}02;\ L=0{,}88;\ \bar{I}_p=0{,}2;$
$\bar{I}_T=0{,}1;\ K_1=1{,}19;\ K_2=2{,}19;3{,}19;\ P=0{,}012;$
$\mu_1=0;\ \mu_2=0;0{,}5;\ H=-0{,}1:\varepsilon=0{,}01;$
$\tau=0{,}02;\ L=0{,}88;\ \bar{I}_p=0{,}1;\ \bar{I}_T=0{,}2;\ K_1=1{,}45;$
$K_2=2{,}45;3{,}45;\ P=0{,}014;\ \mu_1=0;\ \mu_2=0;0{,}5.$

Анализ формулы (2) показывает, что амплитуда вынуждающего момента достигает максимального значения при $\beta=0^0$, H=0,1 ($\beta=180^0$, H=-0,1), минимального значения - при $\beta=180^0$, H=0,1($\beta=0^0$,H=-0,1) и промежуточного значения – при $\beta=\pm90^0$, $H=\pm0{,}1$. Об этом свидетельствуют и графики $M = M(\Omega)$ при различных значениях β и H, представленные на рис. 2 и 3. На рис. 4 и 5, на графиках $\gamma=\gamma(\Omega)$ при $\Omega\to\infty$ начальная фаза вынуждающего момента стремиться к асимптотическому значению: максимальному при $\beta=+90^0$, H=0,1 ($\beta=-90^0$, H=-0,1), минимальному при $\beta=+90^0$, H=-0,1 ($\beta=-90^0$, H=+0,1) и принимает нулевое значение при $\beta=0^0$, 180^0 при любых значениях H.

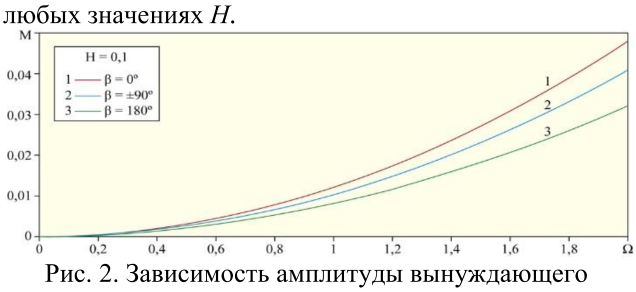

Рис. 2. Зависимость амплитуды вынуждающего момента от частоты вращения. Случай тонкого диска

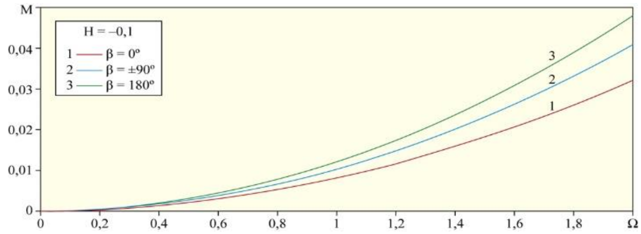

Рис. 3. Зависимость амплитуды вынуждающего момента от частоты вращения. Случай толстого диска

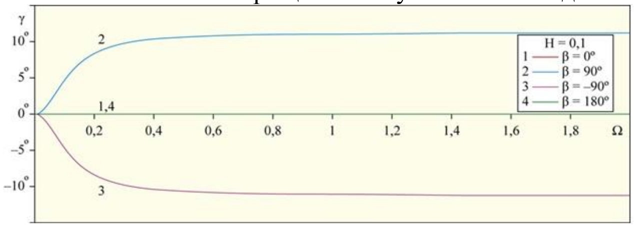

Рис. 4. Зависимость начальной фазы вынуждающего момента от частоты вращения. Случай тонкого диска

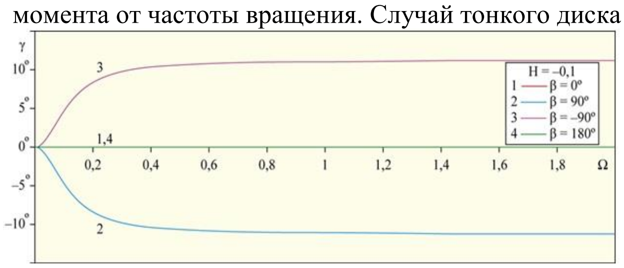

Рис. 5. Зависимость начальной фазы вынуждающего момента от частоты вращения. Случай толстого диска

Зависимости амплитуды A от угла β между линиями дисбаланса массы и максимального перекоса диска (рис. 6 и рис. 8) как в случае линейной модели ротора [17]. Влияние перекоса может приводить либо к увеличению, либо к уменьшению амплитуды колебаний. В случае тонкого диска (H=0,1) при угле $\beta=0$ линия максимального перекоса совпадает с линией вектора эксцентриситета массы, направления моментов силы тяжести, центробежной силы и гироскопического момента совпадают, вынуждающий момент становиться максимальным (смотри рис. 2) и приводит к усилению эффекта отклонения вала от вертикали.

Зависимости амплитуды A от угла β между линиями дисбаланса массы и максимального перекоса диска (рис. 6 и рис. 8) как в случае линейной модели ротора [17]. Влияние перекоса может приводить либо к увеличению, либо к уменьшению амплитуды колебаний. В случае тонкого диска (H=0,1) при угле $\beta=0$ линия максимального перекоса совпадает с линией вектора эксцентриситета массы, направления моментов силы тяжести, центробежной силы и гироскопического момента совпадают, вынуждающий момент становиться максимальным (смотри рис. 2) и приводит к усилению эффекта отклонения вала от вертикали.

При угле $\beta = 180^0$ гироскопический момент противоположно направлен суммарному моменту центробежной силы и силы тяжести, вынуждающий момент и амплитуда колебаний оказываются наименьшими (смотри обсуждение формулы (10) и графика на рис 6).

При угле $\beta = \pm 90^0$ возмущающие воздействия перпендикулярны друг другу, и мы получаем промежуточные значения вынуждающего момента и амплитуды колебаний. В случае толстого диска (*H*=-0,1) зависимость амплитуды колебаний *A* от угла β носит теперь противоположный характер ввиду смены знака гироскопического момента (рис. 8). В частотах вращения близких к резонансной частоте наблюдаются признаки скачков амплитуды происходящих в обратном направлении (рис.6, рис.8) [15]. Когда, кривые соответствующие двум значениям амплитуды A основной гармоники ротора соединяются, соответствующие кривые фазово-частотной характеристики замыкаются, а кривая соответствующая оставшемуся третьему значению амплитуды при критической скорости поднимается вверх или опускается вниз, и в дальнейшем стремясь 180^0 либо -180^0 уровню (рис. 7, рис. 9).

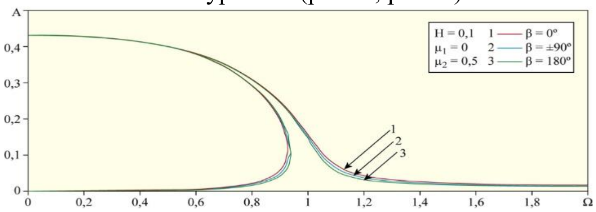

Рис. 6. Влияние угла между ориентациями дисбалансов на амплитудно-частотную характеристику ротора. Случай тонкого диска

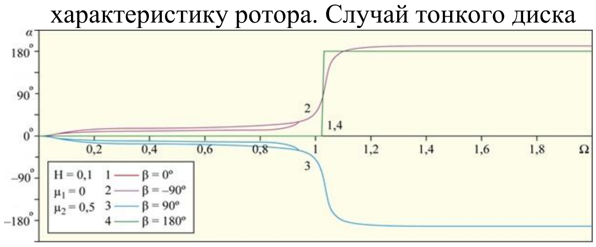

Рис. 7. Влияние угла между ориентациями дисбалансов на фазово-частотную характеристику ротора. Случай тонкого диска

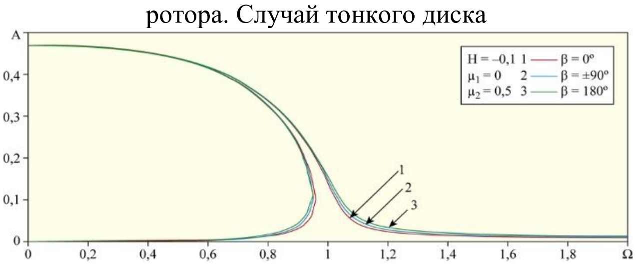

Рис. 8. Влияние угла между ориентациями дисбалансов на амплитудно-частотную характеристику ротора. Случай толстого диска

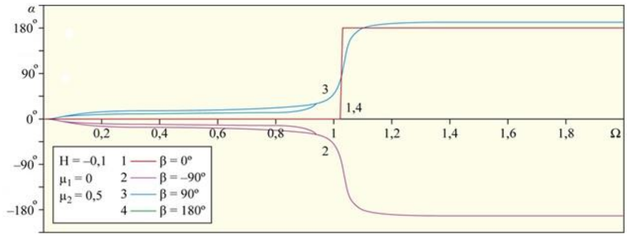

Рис. 9. Влияние угла между ориентациями дисбалансов на фазово-частотную характеристику ротора. Случай толстого диска

В случае $\beta = \pm 90^0$ при изменении толщины диска расположение фазовой частотной характеристики относительно оси абсциссы меняются на обратное. При угле $\beta = 0;180^0$ фазово-частотные характеристики имеют вид как в случае отсутствия демпфирования вообще, хотя коэффициент нелинейного демпфирования μ_2 не равен нулю. Это объясняется с тем, что в выражении $tg\alpha$ (9), слагаемые, содержащие μ_1 и $tg\gamma$, обращаются в нуль, так как значения этих величин равны нулю при угле $\beta = 0;180^0$.

При увеличении коэффициента K_2 нелинейной составляющей упругой силы опоры при постоянном коэффициенте μ_2 нелинейного демпфирования наблюдается картина, показанная на рис. 10 и 11.

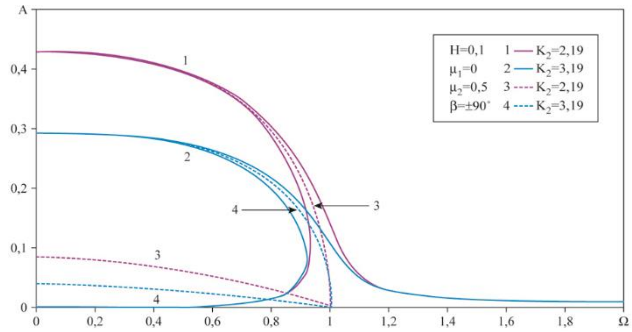

Рис. 10. Влияние коэффициента нелинейной составляющей силы упругости на амплитудно-частотную характеристику и на границы области неустойчивости. Случай тонького диска

Proceedings of the International Symposium of Mechanism and Machine Science, 2017
AzC IFToMM – Azerbaijan Technical University
11-14 September 2017, Baku, Azerbaijan

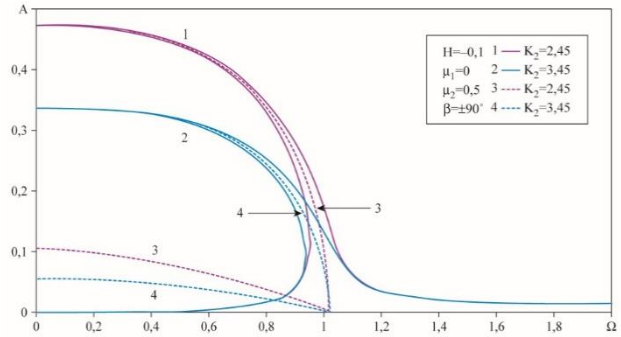

Рис. 11. Влияние коэффициента нелинейной составляющей силы упругости на амплитудно-частотную характеристику и на границы области неустойчивости. Случай толстого диска

Амплитудные кривые изображены сплошными кривыми, а границы между устойчивыми и неустойчивыми областями – пунктирными линиями. Область между этими линиями является областью неустойчивостью. Когда увеличиваем параметр K_2, резонансные кривые затягиваются с конца и наклоняются влево в область низших частот с уменьшением амплитуды. Под влиянием коэффициента K_2 область неустойчивости смещается вниз, верхняя граница больше смешается, чем нижняя. В результате изменяется положение области неустойчивости, а ширина сокращается. Это само собой понятно, что увеличение упругой силы, направленной в положение равновесия, при росте коэффициента K_2 еще больше ограничивает амплитуду колебаний.

На рис. 12 и 13 показаны амплитудно-частотные характеристики и границы области неустойчивости на частоте основного резонанса при различных значениях коэффициента μ_2 нелинейного демпфирования.

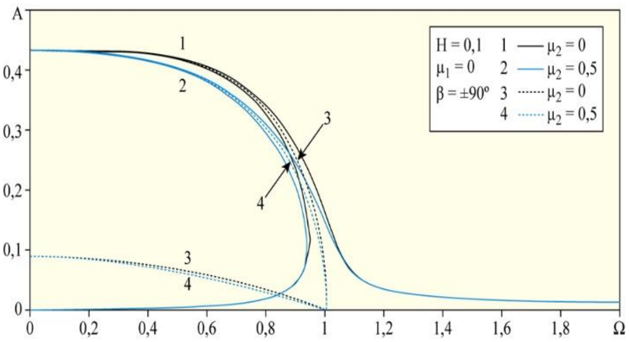

Рис. 12. Амплитудно-частотные характеристики и границы области неустойчивости при различных значениях коэффициента нелинейного демпфирования. Случай тонького диска

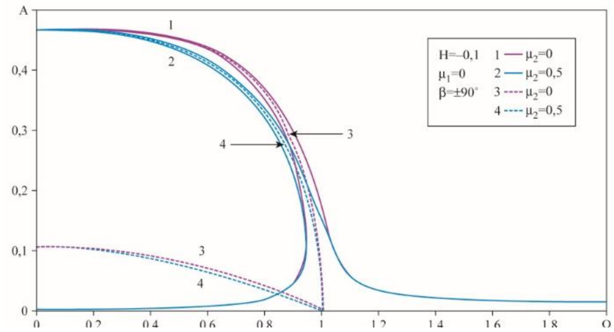

Рис. 13.Амплитудно-частотные характеристики и границы области неустойчивости при различных значениях коэффициента нелинейного демпфирования. Случай толстого диска

Под влиянием коэффициента μ_2 нелинейного демпфирования средняя часть верхних резонансных кривых изгибается, вниз, начиная примерно с особых точек скачков амплитуды. Под действием нелинейного демпфирования средняя часть линии верхней границы смещается вниз значительно больше, чем средняя часть линии нижней границы области неустойчивости, иными словами средняя часть области неустойчивости сужается, что показывает стабилизирующее влияние нелинейного демпфирования. Это доказывает достоверность полученных результатов, прямо противоположных результатам работы [12]. Из-за отсутствия угла β в выражении критерия устойчивости (14) этот угол не влияет на границы устойчивости. Расчеты также показывает, что коэффициент нелинейного демпфирования μ_2 практически не оказывает влияние на фазово-частотные характеристики главного резонанса. Изменение толщины диска ротора влияет на расположение резонансных кривых и на ширину области неустойчивости. Так, например, область неустойчивости для ротора с толстым диском шире чем - для ротора с тонким диском.

Заключение

Исследованы основные резонансные колебания и устойчивость вертикального жесткого гироскопического ротора с мягкой нелинейной упругой характеристикой и нелинейным демпфированием, у которого диск имеет перекос и дисбаланс массы. Обнаружено, что перекос диска влияет на величины амплитуды и фазы вынуждающего момента и соответственно на величины амплитуды и фазы основных резонансных колебаний. Рассмотрены варианты тонкого и толстого диска. Под влиянием нелинейной составляющей упругой силы, как известно резонансные кривые вытягиваются с конца и наклоняются влево, в область низких скоростей вращения, с уменьшением амплитуды, а область неустойчивости смещается вниз, причем верхняя граница больше, чем нижняя граница. Под воздействием нелинейного вязкого демпфирования средняя часть верхних резонансных кривых изгибается, вниз, начиная примерно с особых точек скачков амплитуды. Область неустойчивости смещается, а ее ширина сужается, притом смещение вниз средней части верхней границы больше, чем смещение средней части нижней границы, что доказывает стабилизирующее влияние нелинейного вязкого демпфирования. Формы фазово-частотных характеристик ротора практически остаются неизменными. Изменение толщины диска оказывает влияние на расположение резонансных кривых и на ширину области неустойчивости. Рассмотренную нелинейную модель ротора с двумя степенями свободы можно распространить на модели ротора с четырьмя степенями свободы, так например, на консольный ротор с упругой опорой, на несимметричный ротор с упругими опорами и на другие виды роторов.

Литература

[1]. Zh. Iskakov, *The steady fluctuations of the double-beat cantilever rotor with the skew and disbalance of the disk*, in: Abstracts of the International conference Inverse Problems: Modeling and Simulation. Fethiye – Turkey, pages 77-78, 2008.

[2]. Zh. Iskakov, *Resonance vibrations of unbalanced two-bearing outboard rotor*, in: S.H. Hong, J. Seo, K. Moon (Eds), Advanced Materials, Mechanical and Structural Engineering. Taylor & Francis Group; London, pages 265-270, 2016.

[3]. Zh. Iskakov, & M. Ashirbayev, *Resonant Oscillations of Non-Symmetrical Rotor with Mass Imbalance and Disk Skew,* Applied Mechanics and Materials, Vol. 863, pages 157-162, Trans Tech Publications; Switzerland, 2017

[4]. R.S. Benson, *Steady oscillations of the console rotor with skew and imbalance of a disc*, Design and Manufacturing Engineering 105 (4) pages 35 – 40, 1983.

[5]. B.A. Gordeev, and G.A. Maslov, *Detection of unbalance of rotor with acoustic methods*, in: D.V. Balandin, V.I. Erofeev (Eds), Nonlinear vibrations of mechanical systems 2, Publishing House Dialogue of Cultures; Nizhniy Novgorod, pages 90–95, 2008.

[6]. Y. Liao, and P. Zhang, *Unbalance related rotor precession behavior analysis and modification to the holobalancing metod*, Mechanism and Machine Theory 45 (4), pages 601–610, 2010.

[7]. A.S. Das, and M.C. Nighil, and J.K. Dutt, and H. Irretier, *Vibration control and stability analysis of rotor-shaft system with electromagnetic exciters*, Mechanism and Machine Theory 43 (10), pages 1295-1316, 2008.

[8]. T. Majewski, and D. Szwedowicz, and A. Herrera, *Riquelme*, *Automatic elimination of vibrations for a centrifuge*, Mechanism and Machine Theory 46 (3) pages 344-357, 2011.

[9]. Chung-Jen Lu, and Ming-Cheng Wang, *Stability analysis of a ball–rod–spring automatic balancer*, IJMS 53(10), pages 846-854, 2011.

[10] C. *Hayashi*, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, Chapters 1, 3 – 6. McGraw – Hill, 1964.

[11] W. Szemplinska-Stupnicka, *Higher harmonic oscillations in heteronymous nonlinear systems with one degree of freedom*, International Journal of Non-Linear Mechanics 3 (1), pages 17-30, 1968.

[12] A.B. Kydyrbekuly, *Vibrations and stability of rotor systems and planar mechanisms with nonlinear elastic characteristics, Dissertation of the doctor of technical sciences*. Mechanics and Engineering Institute; Almaty, 2006.

[13]. Z.K. Peng, and Z.Q Mengand Lang, and W.M. Zhang, and F.L. Chu, *Study of the effects of cubic nonlinear damping on vibration isolations using Harmonic Balance Method*, International Journal of Non-Linear Mechanics 47 (10), pages 1065-1166, 2012.

[14]. C. Ho, and Z.Lang, and S.A. Billings, *The benefits of nonlinear cubic viscous damping on the force transmissibility of a Duffing-type vibration isolator*. In: Proceedings of UKACC International Conference on Control; Cardiff, UK, 2012.

[15]. V.A. Grobov, *Asymptotic methods for calculating the flexural vibrations of turbo machines' shafts*. Academy of Sciences Press of the USSR; Moscow, 1961.

[16]. Zh. Iskakov, *Resonant Oscillations of a Vertical Unbalanced Gyroscopic Rotor with Nonlinear Characteristics*. In: Proceedings of 2015 IFToMM World Congress; Taipei, Taiwan, 2015.

[17] Zh. Iskakov, and A. Kalybaeva, *Vibrations and stability of vertical gyro rotor with warped disk and mass imbalance*, Fundamental and applied problems of science, V. 2, Writings of I International Symposium; Moscow pages 50 – 57, 2010.

[18]. Y.G. Panovko, *Introduction to mechanical vibrations theory*. Science; Moscow, 1971.

[19]. R. Van Dooren, *Combination tones of summed type a non – linear damped vibratory system with two degrees of freedom*, International Journal of Non-Linear Mechanics 6, pages 237-254, 1971.