

Взаимодействие жестких включений и трещин со связями между берегами в концевых зонах при продольном сдвиге тела с периодической структурой

Ф.Ф.Гасанов

Азербайджанский Технический Университет,
Азербайджан, г.Баку, пр. Г.Джавид
E-mail: gff74@mail.ru

Abstract

An isotropic medium with a periodic structure under longitudinal shear is considered. A model for the destruction of composite materials with a periodic structure is proposed, based on the investigation of the zone of the fracture process, near the top of the crack. The presence of bonds between the shores of the crack in the end zone is modeled by applying to the crack surfaces the cohesion forces caused by the presence of bonds.

Ключевые слова: изотропная среда, жесткие включения, периодическая система круговых отверстий, трещины со связями между берегами в концевых зонах, силы сцепления, продольный сдвиг.

Введение

На стадии проектирования новых машин и конструкций необходимо учитывать случаи, когда в отдельных деталях машин и конструкций могут возникнуть трещины. Это особенно часто проявляется в деталях новой техники, в которых наибольшее применение находят высокопрочные конструкционные материалы, имеющие периодическую структуру (композиты), и склонные к хрупкому разрушению. Достаточно полное представление о характерном распределении напряжений в микроструктуре линейно армированных материалов, можно получить, изучая распределение напряжений при сдвиге. Решение этой задачи открывает новые возможности прогнозирования механических свойств композитных материалов по данным исходным характеристикам для составляющих компонентов и виду микроструктуры.

Постановка задачи

В структурно-неоднородных материалах при наличии вблизи трещины зон с нарушенной структурой в процесс разрушения вовлекается значительная часть трещины. В таких случаях область разрушения можно рассмотреть как некоторую концевую зону на продолжении трещины

с материалом с частично нарушенными межчастичными связями. Принято, что берега трещины в концевых зонах взаимодействуют причём силы этого взаимодействия, называемые силами сцепления, распределены таким образом, что вершина трещины является особой точкой напряженно-деформированного состояния.

Рассматривается плоская задача теории упругости для изотропной среды с периодической системой круговых отверстий, заполненных абсолютно жесткими включениями, спаянными вдоль обвода, и ослабленной прямолинейными трещинами со связями между берегами в концевых зонах коллинеарных оси абсцисс (рис 1).

Изотропная среда ослаблена периодической системой круговых отверстий, имеющих радиус λ ($\lambda < 1$) и центры в точках $P_m = m\omega$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\omega=2$. Круговые отверстия среды заполнены абсолютно жесткими включениями, спаянными вдоль обводы. Среда (связующее) ослаблена периодической системой прямолинейных трещин со связями между берегами вдоль оси абсцисс. Берега трещин вне концевых зон свободны от внешних нагрузок. На составное тело (композит) действуют напряжения $\tau_y = \tau_y^\infty$, $\tau_x = 0$ (продольный сдвиг на бесконечности).

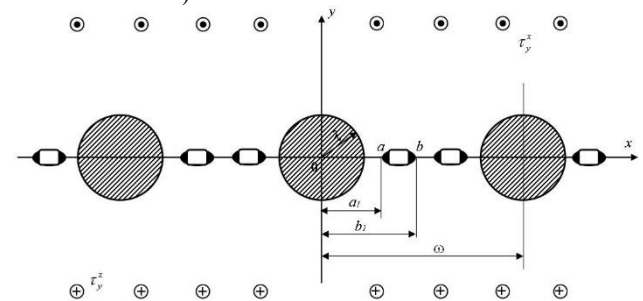


Рис. 1. Расчетная схема задачи

По мере возрастания внешней нагрузки τ_y^∞ на продолжении трещины будут возникать области предразрушения (концевые зоны). Используется модель трещины со связями между берегами в



концевых зонах [1-3]. Концевые зоны трещин моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале связующего. Взаимодействие берегов концевых зон моделируется путем введения между берегами связей с заданной диаграммой деформирования. В исследуемом случае, когда длина концевой зоны трещины не является малой по сравнению с размером трещины, методы оценки сопротивления материала разрушению, основанные на рассмотрении трещины с малой концевой зоной, неприменимы. В таких случаях нужно моделирование напряженно-деформированного состояния в концевой зоне трещины проводить с учетом деформационных характеристик связей и применения двухпараметрического критерия [2] разрушения, описывающего как развитие вершины трещины, так и изменения размера концевой зоны трещины при ее росте.

Когда процессы деформирования и разрушения в концевых зонах трещин включают несколько физических механизмов, как например, композиционных материалах, то в этих случаях эффективным является использование модели концевой зоны с сингулярностью напряженного состояния в вершине трещины. Для однородных материалов такая модель трещины рассмотрена в статьях [2, 4-8] и дано развитие [9, 10] для трещин с концевой зоной на границе раздела материалов с различными свойствами.

Анализ предельного равновесия трещин в композитах с периодической структурой в рамках предлагаемой модели концевой зоны при продольном сдвиге проводится на основе нелокального критерия разрушения с силовыми условиями продвижения вершины трещины и деформационными условиями для определения продвижения края концевой зоны трещины.

При действии внешней нагрузки τ_y^∞ на составную среду в связях, соединяющих берега концевых зон $(a_1+m\omega, a_1+m\omega)$ и $(b_1+m\omega, b_1+m\omega)$ будут возникать касательные напряжения $q_y(x)$ эти касательные напряжения неизвестны и подлежат определению.

Краевые условия задачи имеют вид
 $w=0$ на контурах круговых отверстий

$\tau_y=0$ на свободных берегах трещины (1)

$\tau_y=q_y(x)$ на берегах концевых трещин

Основные соотношения рассматриваемой задачи механики разрушения необходимо дополнить уравнением, связывающим сдвиг берегов концевых зон и усилия в связях. Без потери общности это уравнение представим в виде

$$w^+(x, 0) - w^-(x, 0) = C(x, q_y(x))q_y(x), \quad (2)$$

где функция $C(x, q_y(x))$ представляет собой эффективную податливость связей; $(w^+ - w^-)$ – сдвиг берегов концевых зон трещины.

Используя представление напряжений и перемещений через одну аналитическую функцию [11]

$$\tau_x - i\tau_y = f'(z), \quad w = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} f(z), \quad z = x + iy,$$

где μ – постоянная материала среды; $i = \sqrt{-1}$, краевые условия рассматриваемой задачи запишем в виде

$$f(\tau) + \overline{f(\tau)} = 0 \text{ на контурах круговых отверстий,} \quad (3)$$

$$f'(t) - \overline{f'(t)} = f_x(t), \quad (4)$$

где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); t – аффикс точек берегов трещин с концевыми зонами;

$$f_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{на свободных берегах трещин,} \\ -2iq_y(t) & \text{на берегах концевых трещин} \end{cases}$$

На основании симметрии граничных условий и геометрии области D , занятой материалом связующего, напряжения являются периодическими функциями с периодом ω .

Метод решения задачи

Решение граничной задачи (3)-(4) ищем в следующем виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad (5)$$

$$f_1'(z) = F_1(z) = \tau_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (6)$$

$$f_2'(z) = F_2(z) = \frac{1}{i\omega} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(t-z) dt. \quad (7)$$

Здесь интеграл в формуле (7) берется по отрезку $L = \{[-a_1, -b_1] \cup [a_1, b_1]\}$; $g(t)$ – искомая функция, характеризующая сдвиг берегов трещины с концевыми зонами:

$$g(x) = \frac{\mu}{2} \frac{d}{dx} [w^+(x, 0) - w^-(x, 0)] \text{ на } L \quad (8)$$

$$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega}} - \frac{1}{3} \right].$$

Неизвестная функция $g(t)$ и искомые коэффициенты α_{2k} пока неизвестны и подлежат определению из граничных условий (3)-(4).

К основным представлениям решения задачи (5)-(8) необходимо добавить дополнительные равенства,

$$\int_{-a_1}^{-b_1} g(t) dt = 0, \quad \int_{a_1}^{b_1} g(t) dt = 0, \quad (9)$$



обеспечивающие однозначность перемещений при обходе контура трещины с концевыми зонами.

Для составления уравнений относительно коэффициентов α_{2k} функции $F_1(z)$ преобразуем граничные условия (3) к следующему виду

$$F_1(\tau) + \overline{F_1(\tau)} = F_0(\tau), \quad (10)$$

где $F_0(\tau) = -F_2(\tau) - \overline{F_2(\tau)}$.

Для решения граничной задачи (10) используем метод степенных рядов. Относительно функции $F_0(\tau)$ считаем, что она разлагается на контуре $|\tau| = \lambda$ в тригонометрический ряд Фурье. Подставив левую часть граничного условия (10) вместо $F_1(\tau)$, $\overline{F_1(\tau)}$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки $z=0$, а в правую часть (10) вместо функции $F_0(\tau)$ ряд Фурье и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$ в обеих частях, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k} :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} r_{0,k} + \tau_y^{\infty} = \frac{A_0}{2}, \quad (11)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} r_{j,k} \lambda^{2j} + \alpha_{2j} = A_{2j}$$

где $A_{2k} = -\frac{1}{i\omega} \int_L g(t) f_{2k}(t) dt$,

$$f_{2k}(t) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) - \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \gamma^{(2k+2)}(t), \quad \gamma = ctg \frac{\pi}{\omega} t,$$

$$r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)!}{(2j)!(2k+1)!2^{2j+2k+2}}, \quad r_{0,0} = 0, \quad g_j = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j}}.$$

Удовлетворяя граничному условию на берегах L для определения неизвестной функции $g(x)$, получаем сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\omega} \int_L g(t) ctg \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt - \text{Im } F_1(x) = F_x^*(x) \text{ на } L \quad (12)$$

$$F_x^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{на свободных берегах трещин,} \\ 2q_y(x) & \text{на берегах концевых зон трещин} \end{cases}$$

Полученная система алгебраических уравнений (11) совместно с сингулярным интегральным уравнением (12) дает возможность найти искомую функцию $g(x)$ и коэффициенты α_{2k} . Используя в основной полосе периодов разложение функции $ctg \frac{\pi}{\omega} z$, а также замену переменных, после некоторых преобразований сингулярное интегральное уравнение (12) приводится к стандартному виду:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\tau) d\tau}{\tau - \eta} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(\tau) B(\tau, \eta) d\tau - \text{Im } F_1(\eta) = F_2^*(\eta) \quad (13)$$

$$\text{Здесь } B(\tau, \eta) = -\frac{1 - \lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} B_{j+1} \left(\frac{b_1}{2} \right)^{2j+2} \cdot u_0^j A_j^*,$$

$$A_j^* = \left[(2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{u}{u_0} \right) + \dots + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1) \dots [(2j+1) - (2j+1-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2j+1)} \left(\frac{u}{u_0} \right)^j \right]$$

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad p(\tau) = g(\tau), \quad u = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\tau + 1) + \lambda_1^2,$$

$$u_0 = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\eta + 1) + \lambda_1^2.$$

Решение сингулярного интегрального уравнения (13) ищем в виде [12-14]:

$$p(\eta) = \frac{g_0(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad (14)$$

где функция $g_0(\eta)$ непрерывна по Гельдеру на $[-1, 1]$, причем она заменяется [12-14] интерполяционным многочленом Лагранжа, построенного по Чебышевским узлам.

Используя квадратурные формулы Гаусса-Чебышева, после некоторых преобразований сингулярное интегральное уравнение с дополнительным равенством (9) сводится к конечной алгебраической системе уравнений:

$$\sum_{k=1}^n a_{m,k} g_k^0 - \frac{1}{2} \text{Im } F_1(\eta_m) = \frac{1}{2} F_2^*(\eta_m) \quad (15)$$

$$(m = 1, 2, \dots, M-1)$$

$$\sum_{k=1}^M \frac{g_k^0}{\sqrt{\frac{1}{2} (1 - \lambda_1^2) (\tau_k + 1) + \lambda_1^2}} = 0.$$

Здесь

$$a_{m,k} = \frac{1}{2M} \left[\frac{1}{\sin \theta_m} ctg \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + B(\tau_k, \eta_m) \right],$$

$$\eta_m = \cos \theta_m, \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2M} \pi$$

$$(m = 1, 2, \dots, M), \tau_m = \eta_m$$

В правую часть полученной системы (15) входят неизвестные значения напряженной $q_y(\eta_m)$ в узловых точках принадлежащих концевым зонам трещин.

Неизвестные напряжения в связях $q_y(\eta_m)$, возникающие на берегах концевых зон



$(a_1 + m\omega, a + m\omega)$ и $(b + m\omega, b_1 + m\omega)$, находятся из дополнительного условия (2). С помощью построенного решения, дополнительное уравнение (2) представим в виде

$$\frac{d}{2x} [C(x, q_y(x)) q_y(x)] = \frac{2}{\mu} g(x) \quad (16)$$

Требую выполнения условию (16) в узловых точках, принадлежащих концевым зонам (a_1, a) и (b, b_1) в основной полосе периодов получим еще систему из M_1 уравнений для нахождения приближенных значений $q_y(\eta_{m_1})$ ($m_1=1, 2, \dots, M_1$).

При этом использовали метод конечных разностей.

В случае нелинейного закона деформирования связей для нахождения касательных усилий в концевых зонах использовали итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [15]. Принималось, что закон деформирования межчастичных связей в концевых зонах линейный при $(w^+ \pm w^-) \leq w_*$.

Первый шаг итерационного процесса расчета состоит в решении системы уравнений для линейно-упругих связей. Следующие итерации выполняются только в том случае, если на части концевой зоны имеет место неравенство $(w^+ \pm w^-) > w_*$. Для таких итераций решается система уравнений в каждом приближении для квазихрупких связей с изменяющейся вдоль берегов концевой зоны и зависящей от величины напряжений в связях эффективной податливости, которая вычислены на предыдущем шаге расчета. Процесс последовательных приближений прекращается, когда касательные напряжения вдоль каждой концевой зоны, полученные на двух последовательных итерациях практически не различаются. Расчет эффективной податливости проводили подобно нахождению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [16].

Нелинейная часть кривой деформирования связей аппроксимировалась билинейной зависимостью, восходящий участок которой соответствовал деформированию связей $(0 < (w^+ \pm w^-) \leq w_*)$ с их максимальным усилием связей. При $(w^+ \pm w^-) > w_*$ закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой точками (w_*, τ_*) и (δ_{IIIc}, τ_c) , причем при $\tau_c \geq \tau_*$ имело место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

После решения алгебраических систем коэффициенты интенсивности напряжений K_{III} находились на основании соотношений

$$K_{III}^{a_1} = \sqrt{\frac{\pi b_1 (1 - \lambda_1^2)}{\lambda_1}} \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M (-1)^{k+M} g_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2},$$

$$K_{III}^{b_1} = \sqrt{\pi b_1 (1 - \lambda_1^2)} \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M (-1)^k g_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} \quad (17)$$

Анализ предельного состояния

Для анализа предельного равновесия трещин продольного сдвига с концевыми зонами необходимы два условия (двухпараметрический критерий) разрушения.

Первый критерий это условие разрыва связей на краю концевой зоны.

В качестве первого условия разрушения использовали силовой критерий Ирвина. Состоянию предельного равновесия вершины трещины соответствует выполнения условия

$$K_{III} = K_{IIIc} \quad (18)$$

где K_{IIIc} – постоянная материала, определяемая опытным путем.

В качестве второго условия разрушения использовали критерий критического сдвига трещины и полагали, что предельный сдвиг связей на краю концевой зоны ($X_* = a, X_* = b$) происходит при выполнении условия

$$V(x_*) = w^+(x_*, 0) - w^-(x_*, 0) = \delta_{IIIc}, \quad (19)$$

где δ_{IIIc} – трещиностойкость материала.

Решение системы полученных алгебраических уравнений позволяет (при заданных характеристиках связей и длине трещин) найти критическую внешнюю нагрузку τ_y^∞ и предельный сдвиг берегов концевых зон в состоянии предельного равновесия трещин. Для заданных размеров трещин и концевых зон, используя предельные значения K_{IIIc} и δ_{IIIc} можно выделить следующие режимы равновесия и роста трещин при монотонном нагружении.

Если выполняются условия

$$K_{III} \geq K_{IIIc}, V(X_*) < \delta_{IIIc},$$

то происходит продвижение вершины трещины с одновременным увеличением длины концевой зоны без разрыва связей. Этот этап роста трещин продольного сдвига можно рассматривать, как процесс приспособляемости к заданному уровню внешних нагрузок. Рост вершины трещины с одновременным разрушением связей на краю концевой зоны происходит при выполнении условий

$$K_{III} \geq K_{IIIc}, V(X_*) \geq \delta_{IIIc}.$$

При выполнении условий

$$K_{III} < K_{IIIc}, V(X_*) \geq \delta_{IIIc}$$



происходит разрушение связей без продвижения вершины.

Трещины, а размер концевой зоны уменьшается, стремясь к критическому значению для данного уровня нагрузки. При выполнении условий

$$K_{III} < K_{IIIc}, V(X_*) < \delta_{IIIc},$$

положение вершины трещины и концевой зоны не будут изменяться.

Численными расчетами найдены касательные напряжения в связях и сдвиг противоположных берегов концевых зон трещин от внешнего параметра нагружения τ_y^∞ . Расчеты показывают, что при линейном законе деформирования связей напряжения в связях всегда имеют максимальные значения на краю концевой зоны. Аналогичная картина наблюдается и для величины сдвига берегов трещины, т.е. сдвиг берегов трещины на краю концевой зоны имеет максимум при линейном и нелинейном законах деформирования. При этом с увеличением относительной податливости связей возрастает сдвиг берегов трещины.

Таким образом, совместное решение полученной алгебраической системы и условий (18)-(19) дает возможность найти критическую величину внешней нагрузки, при которых происходит рост трещины.

Заключение

Модель трещины с концевыми зонами со связями между берегами позволяет исследовать основные закономерности распределения напряжений в связях при различных законах деформирования, проводить анализ предельного равновесия составного тела (композита) с учетом деформационного и силового условий разрушения, а также оценивать критическую внешнюю нагрузку и трещиностойкость материала.

Список литературы

- [3]. The special issue: Cohesive models // Eng. Fraet. Mech., 2003, vol. 70, No 14, p. 174, -1987
- [4]. Гаджиев В.Д., Мирсалимов В.М. Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами // Оптимальное проектирование механических систем. Баку: Элм, 1999. с. 50-63.
- [5]. Mirsalomov V.M. and Hasanov F.F. Solution of the periodic problem of propagation of cohesive cracks under longitudinal shear // Material science, vol. 49, No5, p. 631-636.
- [6]. Rose L.R.F. Crack reinforcement by distributed // J. Mech. and Phys. solids. 1987, vol. 35, No4, p. 383-405.
- [7]. Budiansky B., Cui Y.L. On the tensile strength of a fiber reinforced ceramic composite containing a crack like flaw // J. Mech. and Phys. solids. 1994, vol. 42, No1, p. 341-363.
- [8]. Мирсалимов В.М., Рустамов Б.Э. Локальное разрушение горящего твердого ракетного топлива // Изв. вузов. Авиационная техника. 2010, №3, с. 11-15.
- [9]. Мир-Салим-Заде М.В. Рост когезионной трещины в стрингерной пластине // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013, №4, с.16-22.
- [10]. Mirsalimov V.M. and Mustafayev A.B. Inhibition of a curvilinear bridged crack by induced thermoelastic stress field // J. of Thermal Stresses. 2016, vol. 39, No10, p. 1301-1319.
- [11]. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // Изв. РАН. МТТ, 2001, №1, с. 94-11.
- [12]. Греков М.А., Морозов Н.Ф. О равновесных трещинах в композитах, армированных однонаправленными волокнами// Прикла. мат. и мех., 2006, т. 70, вып. 6, с. 1054-1066.
- [13]. Мирсалимов В.М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. Баку, Элм, 1984, -124с.
- [14]. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, Наукова думка, 1976, 443 с.
- [15]. Мирсалимов В.М. Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987, 256.
- [16]. Ladopoulos E.G. Singular integral equations: Linear and non-linear theory and its applications in Science and Engineering. Berlin, Springer-Verlag. 2000. -556 p.
- [17]. Ильюшин А.А. Пластичность. Упругопластические деформации. М., Л., Гостехиздат, 1948, 376 с.
- [18]. Биргер И.А. Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести. // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975, с. 51-73.