

ÖNSÜZGEÇLEMENİN SİNÜZİDAL SIKLIKLARIN KESTİRİMİ ÜZERİNDEKİ ETKİSİ

Emin Anarım, Bülent Sankur ve Mustafa A. Altınkaya
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü,
Boğaziçi Üniversitesi,
80815 Bebek İstanbul

Özetçe

Bu çalışmada, toplanır beyaz Gauss gürültü ortamındaki sinüzoidal ton sinyalleri önsüzgeçlendiğinde modele dayalı sıklık kestiricilerinin başarımının arttığı diğer bir deyişle kestirilen ton sıklığının (sıklıklarının) değişiminin azaldığı gösterilmiştir. Bu bağlamda gürültünün etkisini azaltmak üzere ton sinyallerinin sıklık eksenindeki yaklaşık yerleriyle ilgili önbilgilerin bulunması ya da Ayrık Fourier Dönüşümü (AFD) yardımıyla kazanılması gerekmektedir. Kullanılan modele dayalı yöntemler Pisarenko sıklık kestirimi (PISSK) ve özbağlanımlı (Autoregressive-AR) sıklık kestirimi (ÖBSK)'dir. Her iki yöntem için de önsüzgeçleme yapıldığında ton sıklığı değişimleri için analitik ifadeler bulunmuştur. Kapsamlı benzetim çalışmaları ile kuramsal olarak bulunan değişimi ifadelerinin doğrulanması dışında önerilen yöntemin getirdiği başarımların işaret/gürültü oranı (İGO), önsüzgeçin derecesi ve bant genişliği, ve geçiren bant merkez sıklığıyla gerçek ton sıklığının çakışma durumu ile bağlantısı araştırılmıştır.

1. GİRİŞ

Toplanır beyaz Gauss gürültü ortamında kısa bir veri kaydından ton tipindeki sinyallerin sıklık kestirimi problemi, sayısal sinyal işlemenin kuramında ve uygulamasında hala güncelliğini sürdürmektedir. Bu problem teknik yazında geniş çapta incelenmiştir ve uygulamalarına jeofizik, radar, sonar, astronomi gibi çeşitli alanlarda rastlanabilir [1,2,3].

Elimizdeki veri kaydının kısa olduğu durumlarda modele dayalı spektral kestirim teknikleri genellikle üstün bir başarımla sergiler. Bununla birlikte birçok uygulamada ton sıklıklarının sıklık bölgesindeki yaklaşık yeri (DTMF, çift ton çoklu sıklık almaçlarda olduğu gibi) bilinmektedir ya da bir ön-analiz ile, sözcüğü, verinin Ayrık Fourier Dönüşümündeki (AFD) tepe noktalarını belirleyerek kestirilebilir [4]. Bu durumlarda gürültülü sinyalin tahmin edilen ton sıklıklarının yöresinde dar bant önsüzgeçilmesi yoluyla sıklık kestirimin iyileşmesi beklenebilir.

Bu çalışmada önsüzgeçlemenin ton sıklığı kestiriminin başarımındaki etkileri araştırılmıştır. Ele alınan sıklık kestirim yöntemleri özünde spektrum kestirim yöntemlerine dayanmaktadır. Burada iki yöntem irdelenmiştir:

- Pisarenko katsıklık ayrıştırması (Pisarenko Harmonic Decomposition),
- Özbağlanımlı spektrum kestirimi.

İkinci yöntemde özbağlanımlı çokterimlilerin kökleri bulunmaktadır. Sinyal tek bir gerçel sinüzoidalden oluşan,

$$s_k = A_1 \cos [kT\omega_1 + \theta_1] \quad (1)$$

ve toplanır beyaz Gauss gürültü ortamında gözlemlenen,

$$x_k = s_k + n_k \quad k=0,1,\dots,(N-1) \quad (2)$$

olarak tanımlanır. Burada T örnekleme aralığını, $\{n_k\}$ bağımsız özdeş dağılımlı, sıfır ortalamalı ve değişimisi σ^2 olan bir gerçel Gauss raslantısal değişken dizisini, N veri örneklerinin sayısını göstermektedir. Bilinmeyen parametrelerin genlik A_1 , ton sıklığı ω_1 ve evre açısı θ_1 olduğu varsayılmıştır. İleriki bölümlerde İGO $\mu_1 = A_1^2/2\sigma^2$ olarak tanımlanır.

Önsüzgeç tipik olarak ton sıklığında konumlanmış bir bant-geçiren süzgeçtir. Bant-geçiren süzgeç bant-dışı gürültüyü söndürme dışında yabancı sinyallerin girişimini de önlemekte etkili olmaktadır. Ton sinyali hakkındaki ω_1 sıklığında olduğuna dair önbilgi $2\delta\omega$ bant genişliğindeki ideal bir bant-geçiren süzgecin tanımına aşağıdaki şekilde aktarılabilir:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega_1 - \delta\omega < \omega < \omega_1 + \delta\omega \\ 0 & \text{diğer bölgelerde} \end{cases} \quad (3)$$

$$h(n) = \frac{\sin(\delta\omega nT)}{\pi nT} \sqrt{2} \cos(\omega_1 nT) \quad (4)$$

Pratikte veri kaydının azlığından ötürü bu sonsuz dürtü yanıtı süzgecin pencerelemiş hali ya da doğrudan sonlu dürtü yanıtı tipinde bir süzgeç kullanılmalıdır. Özetle önerilen ton sıklığı kestirimi şu aşamalardan oluşur:

- Ton sıklığı ya da sıklıklarının bulunduğu nokta ve olası yayılma yöresinin kestirilmesi,
- Bant-dışı gürültüyü bir önsüzgeçle zayıflattıktan sonra modele dayalı bir sıklık kestirimi yöntemi kullanımı.

Bu çalışmada Pisarenko sıklık kestirimi (PISSK) ve özbağlanımlı sıklık kestirimi (ÖBSK) yöntemleri kullanıldığında önsüzgeçlemenin ton sıklığı kestirimi üzerindeki etkileri irdelenmiştir. Araştırma mümkün olduğu sürece analitik olarak yürütülmüş ve bilgisayar benzetim deneyleriyle desteklenmiştir.

2. ÖNSÜZGEÇLEMENİN KURAMSAL İRDELEMESİ

Tek tonlu sinyal modeli için Pisarenko sıklık kestirimi verinin özdeğişim matrisinin en küçük özvektörünün sıfırlarını bularak elde edilir ve aşağıdaki şekilde yazılır [5,6]:

$$\hat{\omega} = \arccos \left[\frac{\eta}{2} \right] \quad (5)$$

Denklem (5)'te

$$\eta = \frac{r(2) + \sqrt{r^2(2) + 8r^2(1)}}{2r(1)} \quad (6)$$

olarak tanımlanmıştır ve $r(k)$ verinin k'nci özilinti katsayısını göstermektedir ve (7) ile kestirilir:

$$r_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-k-1} x_i x_{i+k} \quad (7)$$

Beyaz gürültünün bulaştığı durumda PISSK'nın yanlı bir kestirici olduğu kuramsal olarak gösterilmiştir [6]. Diğer yandan özbağlanımlı sıklık kestirici ikinci derece (katsayıları a_1 ve a_2 olan) özbağlanımlı çokterimlinin köklerinin açısı olarak bulunur ve (8)'deki gibi hesaplanır [7]:

$$\hat{\omega} = \arctan \left[\frac{-\sqrt{4a_2^2 - a_1^2}}{a_1} \right] \quad (8)$$

İkinci derece bir açılım uygulayarak (5) ve (8)'de verilen Pisarenko ve özbağlanımlı sıklık kestiricilerin istatistiksel davranışını hesaplayabiliriz. PİSSK için ton sıklığı kestiriminin değişintisi r_1 ve r_2 özilinti katsayılarının ortalama değerlerinin kullanımıyla [6]

$$\text{var}(\hat{\omega}) \equiv \left\{ \left(\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial r_1} \right)^2 \sigma_{r_1}^2 + \left(\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial r_2} \right)^2 \sigma_{r_2}^2 + 2 \text{cov}(r_1, r_2) \left(\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial r_1} \right) \left(\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial r_2} \right) \right\}_{\bar{r}_1, \bar{r}_2} \quad (9)$$

olarak ve ÖBSK için ton sıklığı kestiriminin değişintisi a_1 ve a_2 'nin ortalama değerlerinin kullanımıyla [8]

$$\text{var}(\hat{\omega}) \equiv \left\{ \left(\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial a_1} \right)^2 \sigma_{a_1}^2 + \left(\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial a_2} \right)^2 \sigma_{a_2}^2 + 2 \text{cov}(a_1, a_2) \left(\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial a_1} \right) \left(\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial a_2} \right) \right\}_{\bar{a}_1, \bar{a}_2} \quad (10)$$

olarak hesaplanabilir. Öte yandan önsüzgeçlenmiş verinin özilinti katsayıları süzgeçlenmemiş özilinti katsayılarının doğrusal bir birleşimi olarak yazılabilir:

$$r_k = \frac{N}{N+p-1} \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} h_l h_j r_{k+l+j} \quad (11)$$

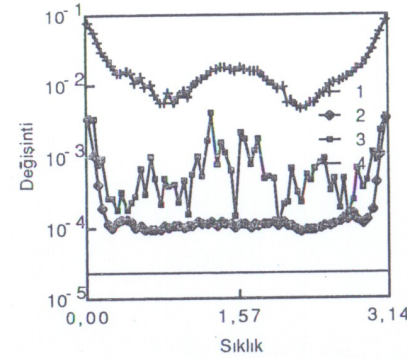
Böylece [8]'de bulunan $\text{Var}(\hat{\omega})$ değişinti ifadeleri r_k 'leri süzgeçlenmiş sinyalin özilinti katsayıları r_k ile değiştirilerek bulunur. Bu sonuçlar Şekil 5'te benzetim sonuçları ile karşılaştırılmaktadır.

3 BENZETİM SONUÇLARI

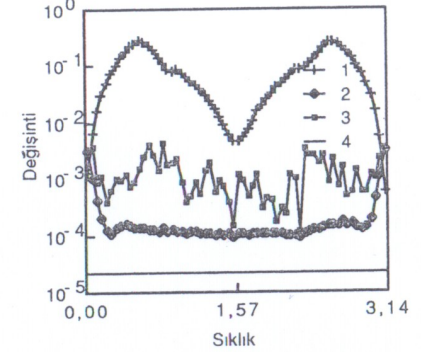
Önsüzgeçlemenin başarımlarını (PİSSK ve ÖBSK sıklık kestiricileri için) tek ton durumunun benzetim çalışmaları yoluyla da araştırılmıştır. Benzetimlerde ton sinyalinin evresinin bilindiği kabul edilmiş ve örnekleme aralığı $T=1$ saniye olarak alınmıştır. Başarımlarını kısıtlı olarak kestirilen sıklığın örnek değişintisi seçilmiştir, benzetim yürütümü ise $M=500$ kez yinelenmiştir:

$$\sigma_{\omega}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\hat{\omega}_i - \omega_1 \right)^2 \quad (12)$$

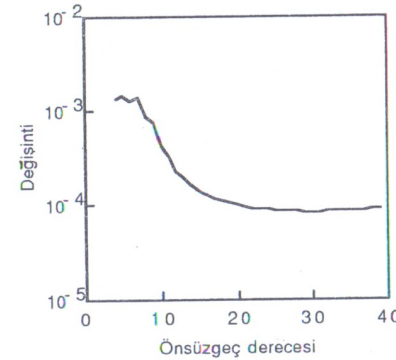
Bu benzetimlerde kullanılan önsüzgeç (4)'de tanımlanan ideal bant-geçiren süzgecin 21-nokta Hamming pencerelemesi halindedir. Önsüzgecin geçirdiği bant (3)'deki tanıma göre $2\delta\omega=0.2\pi$ 'dir. Şekil 1 PİSSK'nın, Şekil 2 ise ÖBSK'nın değişintisinin ton sinyalinin sıklığına göre değişimini göstermektedir. Geçiren bantın merkez ton sıklığıyla çakıştığında bir önsüzgeçli sıklık kestirimi değişintisi de bütün sıklıklar için 20 dB kadar bir iyileşme sağlamaktadır. Bu durum ton sinyalinin sıklığının önceden tam olarak bilinmesi anlamına geldiğinden en iyimser durumdur. Sağlanan bu iyileşme, süzgecin merkezini AFD ve doruk seçme gibi bir yöntemle belirlendiğinde durumda kısmen azalmaktadır.



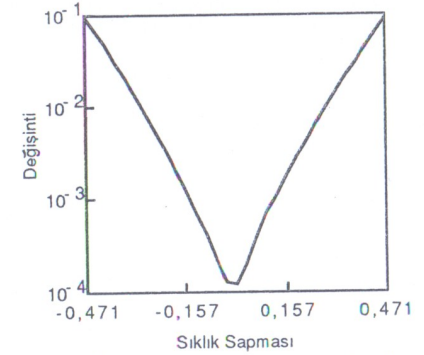
Şekil 1. Önsüzgeçlemenin PİSSK üzerindeki etkisi
1-önsüzgeçlemesiz, 2-önsüzgeçlemeli
3-önsüzgeçlemeli (AFD analizi ile)
4-Cramer-Rao alt sınırı
(İGO=0dB, bant genişliği=0.2π, örnek sayısı=64, 500 benzetim ortalaması)



Şekil 2. Önsüzgeçlemenin ÖBSK üzerindeki etkisi
1-önsüzgeçlemesiz, 2-önsüzgeçlemeli
3-önsüzgeçlemeli (AFD analizi ile)
4-Cramer-Rao alt sınırı
(İGO=0dB, bant genişliği=0.2π, örnek sayısı=64, 500 benzetim ortalaması)



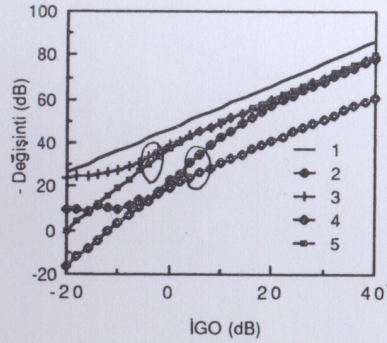
Şekil 3. Önsüzgeç derecesinin önsüzgeçlenmiş PİSSK'nın başarımlarına etkisi
($\omega_1=\pi/4$, İGO=0dB, bant genişliği=0.2π, örnek sayısı=64, 500 benzetim ortalaması)



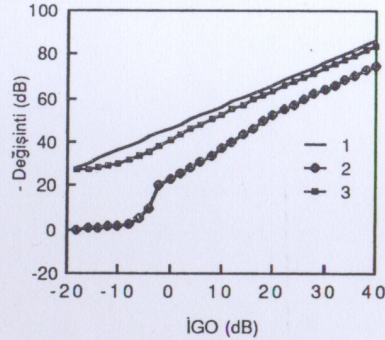
Şekil 4. Önsüzgecin orta sıklığının ton sinyali sıklığından sapsamasının PİSSK'nın başarımlarına etkisi
($\omega_1=\pi/4$, İGO=0dB, bant genişliği=0.2π, örnek sayısı=64, 500 benzetim ortalaması)

Sıklık kestiricinin önsüzgecin derecesi ile ilişkisi Şekil 3'de görülmektedir. Benzetimler İGO=0dB ve $\omega_1=\pi/4$ koşullarında PİSSK için yapılmıştır. Başarımlar süzgeç derecesi 20 civarındaki bir rakkama ulaşmaya kadar hissedilir şekilde artmaktadır. Bu durum çok kısa pencerelerin süzgeçlerin iyi tanımlanmamasına yol açması ya da büyük bant genişliği yüzündedir. Bu da önsüzgecin sağlanması beklenen faydanın kısmen azalmasına yol açmaktadır.

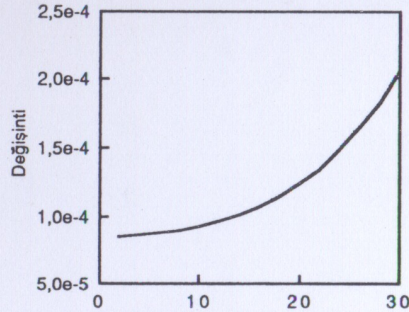
Ton sinyalinin sıklığı önceden tam olarak bilinmeyeceğinden önerilen sıklık kestiricilerinin başarımlarının önsüzgecin orta sıklığına duyarlılığı İGO=0dB ve $\omega_1=\pi/4$ koşullarında PİSSK için araştırılmıştır. Şekil 4'te görüleceği gibi PİSSK'nın başarımları önbilgideki hata miktarı arttıkça hızla azalmaktadır.



Şekil 5. Önsüzgeçlemenin PİSSK üzerinde etkisi
 1-Cramer-Rao alt sınırı
 2-önsüzgeçlemesiz (benzetim ile)
 3-önsüzgeçlemeli (benzetim ile)
 4-önsüzgeçlemesiz (kuramsal)
 5-önsüzgeçlemeli (kuramsal)
 $(\omega_1=\pi/4, \text{İGO}=0\text{dB}, \text{bant genişliği}=0.2\pi,$
 $\text{örnek sayısı}=64, 500 \text{ benzetim ortalaması})$



Şekil 6. Önsüzgeçlemenin ÖBSK üzerinde etkisi
 1-Cramer-Rao alt sınırı
 2-önsüzgeçlemesiz (benzetim ile)
 3-önsüzgeçlemeli (benzetim ile)
 $(\omega_1=\pi/2, \text{İGO}=0\text{dB}, \text{bant genişliği}=0.2\pi,$
 $\text{örnek sayısı}=64, 500 \text{ benzetim ortalaması})$



Şekil 7. Önsüzgeç bant genişliğinin PİSSK'nın başarımına etkisi
 $(\omega_1=\pi/4, \text{İGO}=0\text{dB}, \text{örnek sayısı}=64,$
 $500 \text{ benzetim ortalaması})$

Şekil 5'te PİSSK'nın değişintisinin önsüzgeçli ve önsüzgeçsiz kullanımlarda İGO'na bağlı olarak değişimi görülmektedir. Değişinti ifadeleri için kuramsal değerler (10) kullanılarak bulunmuştur. Şekil 6'da Şekil 5'ten farklı olarak ÖBSK kullanılmıştır. Bu şekiller İGO yükseldikçe, önsüzgeçlemenin sağladığı faydanın azaldığını göstermektedir.

Şekil 7 yine İGO=0dB ve $\omega_1=\pi/4$ koşullarında PİSSK'nın başarımının önsüzgeç bant genişliği ile ilişkisini göstermektedir. Dar bantlı süzgeç kullanımı başarımı artırır da bunun daha fazla önbilgi anlamına geldiği unutulmamalıdır.

4. SONUÇ

Bu çalışmada önsüzgeçlemenin modele dayalı sıklık kestiricilerinin başarımları üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Kullanılan sıklık kestiricilerin değişintisi için türetilen ifadeler, önsüzgeçlemenin kestirimin başarımını artıran basit ve etkili bir yöntem olduğunu göstermektedir ve önsüzgeçlemeli PİSSK ve ÖBSK sıklık kestiricilerin temel özelliklerinin araştırılmasına bir temel oluşturmaktadır. Önsüzgeç ton sinyalinin sıklık eksenindeki yaklaşık yerinin önceden bilindiği varsayılarak oluşturulmuştur. Ton sinyalinin yeri tam olarak bilindiğinde önerilen yöntem etkili olmaktadır. Klasik AFD analizi uygulayarak ω_1 'nin önceden belirlendiği durumda bile önsüzgeç, İGO \geq 0dB olması koşuluyla, kestiricilerin başarımında yaklaşık aynı artışı sağlamaktadır. Sunulan benzetim sonuçları türetilen formüllerin geçerliliğini doğrulamakta ve analitik olarak gösterilmeyen pratikteki önemli durumlarda, önsüzgeçlemenin sağladığı başarımların kavranmasına yardımcı olmaktadır. Sonuç olarak önerilen sıklık kestiricilerinin önsüzgeçlemesiz kullanım durumlarına oranla kestirimin değişintisi bağlamında üstünlükleri gösterilmiştir.

5. KAYNAKÇA

- [1] S.M. Kay, and S.L. Marple, "Spectrum Analysis: A Modern Perspective", Proc. IEEE, Vol.69, November 1981, pp. 1380-1419.
- [2] D.W.Tufts, R. Kumaresan, " Estimation Of Frequencies Of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood", Proc. IEEE, Vol. 70, September 1982, pp.975-989.
- [3] T. J. Abatzoglu, "A Fast Maximum Likelihood Algorithm For Frequency Estimation Of A Sinusoid Based On Newton's Method", IEEE Trans. on Acoustic Speech and Signal Processing, Vol. 33, February 1985, pp. 77-89.
- [4] R. Kumaresan, Y. Feng, "FIR Prefiltering Improves Prony's Method", IEEE Trans. on Acoustic Speech and Signal Processing, Vol 39, March 1991, pp. 736-741.
- [5] V.F. Pisarenko, "The Retrieval Of Harmonics From A Covariance Function", Geophys. J. Royal Astron. Soc., Vol. 33, September 1973, pp. 347-366.
- [6] E.Anarım, Y. İstefanopulos, "Statistical Analysis Of The Pisarenko Type Tone Frequency Estimator ", Signal Processing , Vol. 24, 1991, pp. 291-298.
- [7] E. Anarım, B. Sankur, "Statistical Analysis Of Tone Frequency Estimators Based On Autoregressive Models", The Fourth Inter. Conf. on Computer and Inf. Sciences (ISCISIV), İzmir, Turkey, October 1989.
- [8] E. Anarım, B. Sankur, " Robust Detection Of Tone Signals By Autoregressive Frequency Estimation ", Signal Processing, Vol. 30, 1993, pp. 271-278.
- [9] S.M. Kay, Modern Spectral Estimation: Theory and Applications, New Jersey: Prentice Hall, 1988.